La invención de la teoría de grupos

Galois

GENIOS de las MATEMÁTICAS

La invención de
la teoría de grupos

Galois

RBA

© 2016, Fernando Corbalán por el texto
© 2017, RBA Coleccionables, S.A.

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí
Diseño interior: Luz de la Mora
Infografías: Joan Pejoan
Fotografías: Album: 18, 21b, 51, 71ad, 71b, 89, 127ad, 149; Archivo RBA: 21ai, 21ad, 24, 33, 37, 53ad, 53bi, 53bd, 71ai, 74, 76, 83, 87, 98, 102, 117ai, 117ad, 117b, 127bi, 127bd; istockphoto: 53ai; Getty Images: 59, 100, 127ai; Shutterstock: 105.

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada o transmitida por ningún medio sin permiso del editor.

ISBN (Obra completa): 978-84-473-8775-5
ISBN: 978-84-473-9065-6
Depósito legal: B 17254-2017

Impreso y encuadernado en Cayfosa (Impresia Ibérica)

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

INTRODUCCIÓN 7

CAPÍTULO 1 El camino hacia una imposibilidad 13

CAPÍTULO 2 Ciencia, matemáticas y revolución 41

CAPÍTULO 3 La educación de un joven matemático 65

CAPÍTULO 4 Revolución, matemáticas y muerte 93

CAPÍTULO 5 Origen, actualidad y aplicaciones de la teoría de Galois 121

LECTURAS RECOMENDADAS 153

ÍNDICE 155

Introducción

Évariste Galois vivió en una época en la que todo estaba cambiando y en la que se estaba formando nuestro presente. Cuando nació, en 1811, estaba en toda su gloria el imperio de Napoleón, que dominaba media Europa. Todavía ardía la llama de la Revolución de 1789 y sus consecuencias se iban a expandir por todo el continente. Se reorganizó el sistema de enseñanza y se le dio más importancia a la educación científica y técnica, y toda una constelación de científicos, y en particular de matemáticos, tuvo un destacado papel social. Al imperio napoleónico le siguió un intento de vuelta al pasado a partir de 1814 que provocaría toda una serie de revueltas populares para evitarla, en las que se implicó con toda su energía juvenil el protagonista de estas páginas. Podría decirse que vivió tiempos difíciles, pero no hay que olvidar que, como afirmaba el escritor argentino Jorge Luis Borges, todos los tiempos son difíciles.

En los menos de veintiún años que vivió, Galois tuvo tiempo de revolucionar las matemáticas, abordando un problema con fuertes resonancias actuales. Todo estudiante, durante su vida escolar, se ha enfrentado con la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, y ha tenido que aprenderse y aplicar las fórmulas correspondientes. Y es que durante siglos se habían buscado las raíces de una ecuación (es decir, aquellos valores que hacen que se cumpla dicha ecuación) por medio de operaciones con los

coeficientes de la misma, y se había logrado obtener fórmulas, bastante complicadas, también para las ecuaciones de tercer y cuarto grados. Pero no se podía lograr nada para grados mayores.

Antes de Galois ya se había probado que no había una solución general —una «fórmula»— para las de cuarto grado. Galois demostró que no la habría para ningún grado mayor que este y que el hecho de tener solución alguna ecuación en particular (que las hay y muchas) dependía de una estructura de esas raíces, no de los coeficientes. Así que en algebra se dejó de poner el acento en hacer operaciones numéricas y se pasó a buscar y definir estructuras. Y el mismo camino se siguió en las décadas sucesivas en el resto de las matemáticas, empezando por la geometría. Pocas personas —o ninguna— con una existencia tan corta han tenido una influencia tan decisiva en algún campo del conocimiento. Sin embargo, Galois no tuvo la fortuna de poder disfrutarlo en vida, sino que hubo que esperar algunos decenios para que sus ideas fueran entendidas y ejercieran la influencia esperada.

Évariste Galois dedicó su corta vida a dos objetivos revolucionarios: cambiar las matemáticas, en particular en el álgebra, y transformar la sociedad en que vivía para hacerla más progresista. Sin embargo, a pesar de que puso gran determinación en ambos, no recibió muchas alegrías en ninguno de los dos ámbitos.

Como activista social y político estuvo afiliado y fue militante activo —y bastante aventurero— de un grupo republicano extremista, la Société des Amis du Peuple (Sociedad de Amigos del Pueblo), lo que le supuso ser expulsado del centro de enseñanza en que estudiaba y padecer la represión policial y judicial del régimen vigente. Acabó ante los tribunales y visitó la cárcel por dos veces en menos de dos años.

En el terreno de las matemáticas fue un francotirador que se enfrentó a las estructuras científicas oficiales. Tuvo una formación no muy ortodoxa, pero extremadamente apasionada y con un deseo febril por la exploración y el aprendizaje, lo que junto con sus cualidades le hizo afrontar los problemas por caminos completamente diferentes a los explorados hasta entonces. Esto le permitió descubrir nuevas vías y cambiar completamente las matemáticas.

Murió sin haber visto reconocida su labor matemática, a pesar de que, en plena juventud, publicó artículos en prestigiosas revistas matemáticas, junto a reputados matemáticos, y una memoria suya había sido discutida en la Academia de Ciencias de Francia, la institución científica más importante del momento en su país y quizás en todo el mundo. Aunque fue rechazado en varias ocasiones, Galois siempre fue consciente de que el edificio matemático que había levantado era correcto, por lo que en su testamento solo pidió a un amigo que hiciera llegar su legado a dos destacados matemáticos para que dieran su opinión, no sobre su validez, sino sobre su importancia.

Su trabajo se publicó póstumamente y no tuvo repercusión hasta quince años después, cuando un matemático de renombre accedió a revisarlo gracias a la insistencia del hermano de Galois. Después tuvo tal resonancia e influencia en la forma de pensar y de hacer que hoy en todas las facultades de matemáticas del mundo se imparte una materia con su nombre: es la «teoría de Galois». Su influjo es patente en todos los grandes estudiosos y en todas las corrientes matemáticas posteriores a su muerte.

En el plano personal tuvo una vida poco afortunada. Sufrió dificultades económicas, sobre todo tras el suicidio de su padre —víctima de maquinaciones políticas—, agudizadas tras su expulsión de la Escuela Normal. Persona de carácter difícil, molesto, sin interés por nada que no fueran las matemáticas, era airado y despectivo con los poderes establecidos. Era un inadaptado, un radical. Su única relación sentimental, además, duró poco y sufrió un cruel desengaño amoroso.

Su vida, además, tuvo un final novelesco. En 1832, en plena juventud, antes de cumplir veintiún años, Galois murió como consecuencia de las heridas recibidas en el abdomen en un duelo a pistola cuyos motivos no están todavía hoy nada claros. No alcanzó a ser testigo, pues, de los cambios políticos que anhelaba.

Pero después de su desaparición brillaron la solidaridad y el cariño de su hermano y de Auguste Chevalier, el amigo al que dirigió su testamento, que lucharon sin descanso hasta conseguir el reconocimiento de su aportación matemática. El porvenir le ha hecho la justicia que no conoció en vida.

En las siguientes páginas se recorrerá, de la mano de Évariste Galois, una época en la que tuvo lugar una serie de empresas científicas de primera magnitud, como la fijación de un sistema de medidas adecuado para toda la humanidad —el actual sistema métrico decimal— o la reforma del calendario; una época en la que se ensanchó el mundo europeo con expediciones a otros continentes, como la de los franceses a Egipto; en la que los países sudamericanos fueron logrando su independencia respecto a las metrópolis europeas; en la que se alumbraron una astronomía más potente y una nueva teoría sobre la probabilidad; en la que resplandeció la luz de una constelación de matemáticos franceses que, además de relevancia científica, tuvo resonancia política y social.

A continuación desfilará una galaxia de sabios —algunos contemporáneos de Galois— que a lo largo de los siglos y en diferentes países hicieron avanzar el algebra: a pesar de sus revolucionarias aportaciones y de su rebeldía hacia la tradición, como todos los que han hecho avanzar la ciencia y el conocimiento se apoyaron en los resultados de los que le precedieron. Galois pensaba, sin embargo, que la tarea fundamental de los matemáticos debería ser la que él siguió, en un alarde de confianza en sí mismo, y de cierto desprecio hacia el resto de los matemáticos: «Saltar con los pies juntos sobre los cálculos; agrupar las operaciones, clasificarlas según sus dificultades y no según sus formas; tal es, según creo, la misión de los geómetras [matemáticos] futuros; y esa es la vía en la que he entrado en esta obra».

Nos disponemos a asistir a una vida apasionante que discurrió entre grandes tensiones científicas, sociales y políticas, de las que brotaron nuevas ideas. Como escribió el matemático español Julio Rey Pastor (1888-1962), «mucho más difícil que investigar en un punto concreto de la ciencia, acarreando nuevos materiales quizás utilizables para la construcción del edificio, es alcanzar originalidad en el método; esto es, trazar los planos del edificio mismo o modificar con ventaja los ya trazados». Eso es lo que logró Évariste Galois.

1789 El 14 de julio una multitud asalta la fortaleza de la Bastilla en París en el inicio simbólico de la Revolución francesa.

1799 El 24 de diciembre (año VIII de la Revolución) se establece en Francia el Consulado y Napoleón Bonaparte consigue ser elegido Primer Cónsul, con poderes similares a los de un dictador.

1804 El 28 de mayo Napoleón se proclama emperador de los franceses.

1811 El 25 de octubre nace Évariste Galois en Bourg-la-Reine, a las afueras de París, en un ambiente propicio para su desarrollo intelectual: su padre es el director de una escuela y su madre, hija de una influyente familia parisina.

1814 Derrota de los ejércitos franceses y ocupación de París por las fuerzas de la Sexta Coalición. El tratado de Fontainebleau entre Napoleón y los representantes de Austria, Rusia y Prusia sienta las bases de la renuncia del emperador francés y las condiciones de su exilio en la isla de Elba. El 6 de abril el rey borbón Luis XVIII accede al poder.

1815 Napoleón vuelve de su exilio el 20 de marzo y gobierna de nuevo durante los llamados «Cien Días» antes de ser derrotado definitivamente en Waterloo y enviado al exilio a la isla de Santa Elena.

1821 Carl Friedrich Gauss enuncia la teoría del error y el método de los mínimos cuadrados.

1823 Évariste Galois inicia sus estudios en el liceo parisino de Louis-le-Grand, centro famoso por la calidad de su enseñanza y el prestigio de sus alumnos.

1829 El matemático noruego Niels Henrik Abel muere el 8 de abril. Galois publica su primer artículo matemático: «Demonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques» («Demostración de un teorema relativo a fracciones continuas periódicas»).

1830 Estalla la revolución contra la monarquía borbónica que acaba con Luis Felipe de Orleans en el trono francés. Galois publica tres artículos en una prestigiosa revista matemática, el *Bulletin de Férussac*. No consigue entrar en la Escuela Politécnica, pero sí lo hace en la Normal, de donde acaba siendo expulsado.

1831 Galois publica un artículo en *La Gazette des Écoles* titulado «Sur l'enseignement des sciences» («Sobre la enseñanza de las ciencias»). Es detenido y encarcelado en dos ocasiones.

1832 El 31 de mayo Galois muere a causa de una peritonitis fruto de las heridas de bala provocadas en un duelo a pistola. Aparece su testamento matemático.

CAPÍTULO 1

El camino hacia una imposibilidad

La historia de Évariste Galois no puede entenderse sin conocer la historia del álgebra, es decir, del arte de calcular del mismo modo que la aritmética, pero haciendo abstracción de los números concretos. Con las aportaciones del joven matemático francés y las del noruego Niels Henrik Abel el álgebra se convirtió en la primera mitad del siglo XIX en una disciplina moderna dedicada no solo a resolver ecuaciones, sino a estudiar estructuras.

Évariste Galois cambió las matemáticas radicalmente. Y eso a pesar de vivir tan solo veintiún años. Esta extrema precocidad no es algo infrecuente en la historia de las matemáticas: basta recordar a Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que con dieciocho años demostró que era posible inscribir un polígono regular de diecisiete lados utilizando solo regla y compás —lo que le hizo decantarse por las matemáticas—, o Niels Henrik Abel (1802-1829), que vivió poco más que Galois, menos de veintisiete años, y demostró que la ecuación general de quinto grado no era resoluble por radicales, una conclusión que abrió el camino del matemático francés. Galois tuvo, además, un exacerbado espíritu revolucionario: fue lo que hoy se llamaría un extremista radical, dedicado como estuvo a la lucha política contra el rey borbón Carlos X y, después, contra Luis Felipe I de Orleans, el último monarca de Francia, elegido por los liberales para liderar la monarquía parlamentaria que, durante casi dos décadas (1830-1848), precedió a la Segunda República. Para Galois, quien pudo ver los primeros años de reinado de Luis Felipe, este defraudaba el espíritu de la revolución de 1830 que lo había aupado al poder. Fue, igualmente, un sagaz crítico de los métodos de enseñanza, a pesar de ser entonces Francia avanzadilla docente.

La vida de Galois, además de breve, fue muy agitada. Tuvo tendencia a la depresión y fue desafortunado en amores así como un alumno conflictivo que se enfrentó con sus profesores y examina-

dores en diversas ocasiones. En un examen de ingreso a la Escuela Politécnica —una de las más prestigiosas de todo el país— acabó lanzando un borrador a la cabeza de uno de los miembros del tribunal. Además, fue detenido y llegó a pisar la cárcel varias veces.

Su final fue completamente novelesco, ya que murió en un duelo a pistola por causas muy poco claras. En una carta enviada a dos de sus amigos la noche anterior al enfrentamiento, Galois les anuncia su muerte como consecuencia de un duelo al que «ha sido imposible negarme». En otra misiva de esa misma noche, dirigida «a todos los republicanos», les pide que no le reprochen no haber muerto por su país, sino hacerlo «víctima de una infame coqueta». Y todo eso en una época de grandes cambios, testigo del inicio de las máquinas de vapor y de los ferrocarriles, de la dinamo, del cloroformo o de la vacuna de la viruela, entre muchos otros avances tecnológicos y científicos. Fue la época en la que se fraguó nuestro presente, la de personajes como Verdi, Marx, lord Byron, Champollion, Goya o Darwin.

La historia de Galois es inseparable de la del álgebra. La historia «adulta» del álgebra comenzó cuando el matemático y astrónomo persa Al-Juarismi (quien vivió entre 780 y 850 y de cuyo nombre procede el término «algoritmo») publicó su obra *Compendio de cálculo por transposición y eliminación* en el siglo IX, que colocó los cimientos de esta nueva rama de las matemáticas. El también persa Omar Jayam (1048-1131) fue el que definió el álgebra como el estudio de la resolución de ecuaciones, que fue evolucionando hasta que, en la Italia renacentista, Girolamo Cardano (1501-1576) y Niccolò Fontana, *Tartaglia* (1499-1557), se encargaron de resolver hasta la ecuación general de cuarto grado. Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) enunció el teorema fundamental del álgebra en el siglo XVIII, que Carl Friedrich Gauss demostró poco más tarde: toda ecuación de grado n tiene n soluciones. En ese punto parecía que la ecuación general de grado n se tendría que resolver por radicales hasta de grado n. Sin embargo, para un valor de n mayor de 4 todos los intentos de resolución acababan siendo estériles. Fue el también precoz —como Galois— Niels Henrik Abel quien demostró en 1824 que la ecuación general de quinto grado no era resoluble por radicales de grado 5, ni de ningún otro grado.

A principios de la década de 1830, fue el protagonista de esta historia, Évariste Galois, quien caracterizó las ecuaciones resolubles por radicales, para lo que definió el «grupo de la ecuación» y estudió los tipos de grupos. Para algunos de ellos tendrá solución; para otros, no. El álgebra clásica acabó aquí como el arte de resolver ecuaciones: comenzaba el álgebra moderna, el estudio de las estructuras. Y así se sigue estudiando hoy, con fecundos resultados, la llamada «teoría de Galois».

«Defiende tu derecho a pensar, porque incluso pensar de manera errónea es mejor que no pensar.»

— HIPATIA DE ALEJANDRÍA.

EL ORIGEN Y OBJETO DEL ÁLGEBRA

Cuando se realizan operaciones con números, el terreno pisado es el de la aritmética, aunque si se trata de encontrar relaciones entre cantidades desconocidas, pero de las que se saben algunas propiedades, y se quiere por medio de su manipulación llegar a encontrar dichas cantidades, entonces se estaría hablando de álgebra.

Su nombre procede, como se ha dicho, del título de un famoso libro del matemático y astrónomo Al-Juarismi. Su tratado llevaba por título *Al-jebr w'al-muqabala*, que quiere decir en castellano «transposición y eliminación». Por transposición (*al-jebr*) se entiende el cambio o la transferencia de términos de uno al otro miembro de una ecuación, y por eliminación (*al-muqabala*) la cancelación, la supresión de términos iguales en ambos miembros de la misma.

La primera palabra árabe del título del libro, *al-jebr*, se transformó en «álgebra» en su transcripción al latín, fruto de las traducciones de la obra. De aquí procede, precisamente, el término moderno de la disciplina. El otro vocablo del título, *al-muqabala*, fue finalmente abandonado, aunque durante algún tiempo, en la Andalucía en que coexistían cristianos y musulmanes, siguió lla-

UN NOMBRE MUY INFLUYENTE

El nombre de Mahommed ibn Musa Al-Juarismi (ca. 780-ca. 835) tiene el significado de Mahommed, hijo de Musa, nativo de Khwarizm o Jwarizm (el actual Jiva, en Uzbekistán). Al-Juarismi trabajó de bibliotecario y astrónomo en Bagdad, entonces una de las ciudades más importantes del mundo y gran foco de irradiación cultural, en la corte del califa abasí Abdullah al-Ma'mun (el mismo que aparece en *Las mil y una noches*). Como prueba de la extraordinaria importancia de su libro *Compendio de cálculo por transposición y eliminación*, el nombre de Al-Juarismi se utiliza ya como una palabra autónoma: ha acabado siendo, en todos los idiomas, el término matemático «algoritmo», que designa el método o conjunto de reglas de cálculo para obtener un resultado. Por ejemplo, el algoritmo de la división o el de Euclides para dividir polinomios. Su ámbito ha acabado excediendo las matemáticas y se conoce como «algoritmo» un proceso explícito y efectivo para obtener un resultado cualquiera en la vida cotidiana, por ejemplo para poner en marcha un ordenador o hacer que una lavadora deje limpio un determinado tipo de ropa. Su importancia es enorme en la economía digital; esta funciona a golpe de algoritmos, cada vez más sofisticados, que ya gobiernan muchos aspectos de nuestra actividad y están llamados a hacerlo más en el futuro.

Sello conmemorativo del 1200º aniversario del nacimiento de Al-Juarismi, emitido en la antigua Unión Soviética.

mándose «almucabala» al arte de la resolución de ecuaciones utilizando los métodos que hoy se calificarían de algebraicos.

Aunque su origen haya sido casual, y el resultado del título de un libro famoso, lo cierto es que la palabra «álgebra» responde bien al contenido real de la disciplina. El álgebra trataba del estudio de las operaciones matemáticas consideradas, formalmente, desde un punto de vista general, haciendo abstracción de los números concretos; es decir, trataba de buscar reglas y formas de operar

con números con independencia de su valor, de ahí que se utilicen letras, en vez de números, para representar valores cualesquiera. Sus problemas están relacionados con las reglas formales para la transformación de expresiones en otras más convenientes, para así llegar a la solución de ecuaciones. Lo que hizo Al-Juarismi fue dar a su libro el nombre de dos de las reglas formales de transformación más generales, expresando así el espíritu profundo del álgebra.

ANTES DEL ÁLGEBRA

Desde que se conocen textos de matemáticas, en ellos se intentan resolver problemas que se pueden abordar por medio del álgebra. Así pasa en la matemática del Egipto de los antiguos faraones, de la que han llegado restos hasta la actualidad en algunos papiros. El texto matemático más antiguo que se conoce es el llamado «papiro de Rhind», conservado en el Museo Británico de Londres, cuyo nombre procede de la persona que lo donó, el abogado e historiador escocés Alexander Henry Rhind. Fue escrito por el escriba Ahmes hacia el año 1650 a.C., aunque el autor reconoce en el texto que sus fuentes tienen más de trescientos años de antigüedad. El papiro contiene 87 problemas matemáticos en los que se observan fracciones, reglas de tres, ecuaciones lineales, trigonometría, cálculo de áreas y volúmenes, progresiones, etcétera. En él, además, puede leerse este problema, que es abordable mediante métodos algebraicos:

> Repartir 100 medidas de trigo entre cinco personas de la manera siguiente: la segunda recibirá tanto más que la primera como la tercera recibirá más que la segunda, que la cuarta recibirá de más que la tercera y que la quinta recibirá de más que la cuarta. Además, entre las dos primeras personas deben tener siete veces menos de trigo que las otras tres. ¿Cuánto trigo hay que dar a cada persona?

El otro gran documento matemático del antiguo Egipto que se conserva es el llamado «papiro de Moscú», depositado en el Museo Pushkin de la capital rusa. Su comprador fue el egiptólogo

Vladímir Goleníshchev, y en él pueden verse dos problemas que también son solucionables mediante álgebra. El primero dice lo siguiente: «El área de un rectángulo es 12. La anchura mide los 3/4 de la longitud. ¿Cuáles son las dimensiones?». El segundo, por su parte, plantea que «un lado de un triángulo rectángulo vale dos veces y media la medida del otro y el área es 20. ¿Cuáles son las dimensiones?».

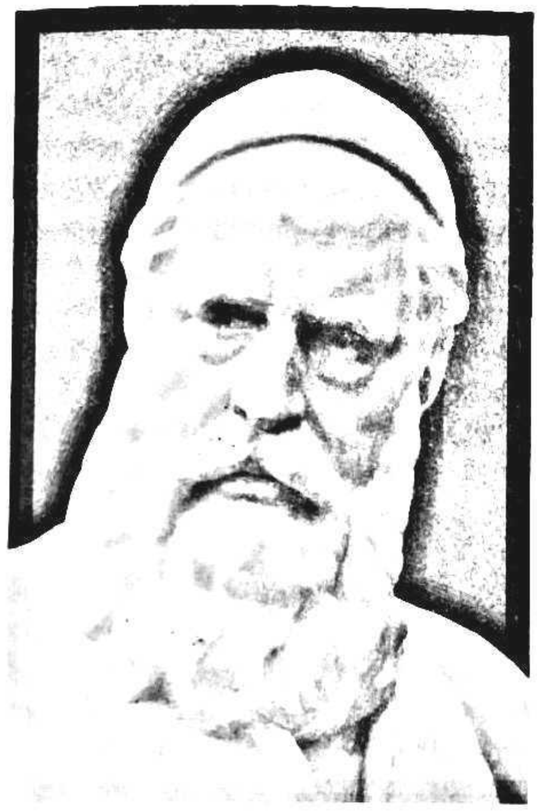
También en Babilonia se planteaban problemas que pueden afrontarse desde el álgebra, y que han llegado a la actualidad grabados en escritura cuneiforme en tablillas de arcilla. Entre ellos el que puede leerse a continuación: «Una superficie de medida 1 000 está formada por la suma de dos cuadrados. El lado de uno de ellos mide 10 menos que los 2/3 del lado del otro cuadrado. ¿Cuáles son los lados de los dos cuadrados?».

En estos inicios de las matemáticas, parece que los babilonios —asentados en el actual territorio de Iraq— llegaron a desarrollar métodos para resolver problemas en los que intervenían lo que ahora podrían llamarse ecuaciones de primer y segundo grado y hasta, a veces, de tercer grado. Para ello se sirvieron de su buen sistema de numeración posicional de base 60, que todavía hoy, tres mil años después, se sigue utilizando en la medida del tiempo y de los ángulos.

Se cree que los razonamientos de los babilonios eran muy parecidos a los utilizados en la actualidad, salvo por el hecho de que no usaban ningún tipo de simbolismo. Por ello es muy difícil seguir sus cálculos.

Un buen sistema simbólico permite representar las incógnitas y la forma de las ecuaciones; sin embargo, los babilonios estaban limitados en este sentido porque esto les impedía la generalización, la abstracción. De hecho, este ha sido un problema que a la humanidad le ha costado largo tiempo resolver.

En lo que hace referencia al álgebra, la aportación egipcia, hasta donde conocemos, fue bastante menor, puesto que los problemas que trataban eran de naturaleza aritmética (es decir, intervenían números concretos). Sin embargo, sí que avanzaron en el simbolismo, e introdujeron los símbolos de las operaciones de sumar y restar.



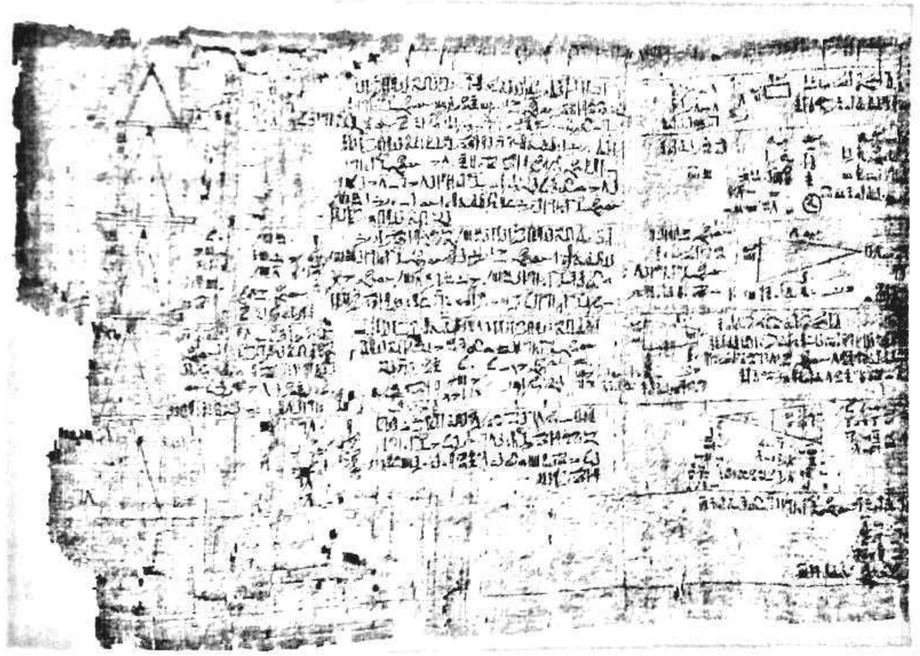


FOTO SUPERIOR IZQUIERDA
Busto del poeta y matemático persa Omar Jayam expuesto en la población iraní de Nishapur.

FOTO SUPERIOR DERECHA
Retrato del matemático francés Jean le Rond d'Alembert, obra de Maurice Quentin de La Tour (1704-1788).

FOTO INFERIOR
Fragmento del «papiro de Rhind», escrito por el escriba Ahmes hacia el 1650 a.C. y hoy en el Museo Británico de Londres.

LA GRECIA CLÁSICA Y EL ESPLENDOR DE LA GEOMETRÍA

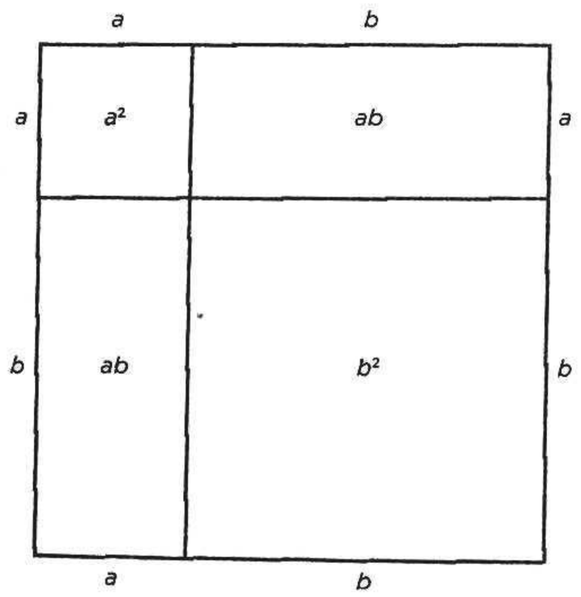
En la Grecia clásica se cultivó poco el cálculo, ya que consideraban que lo más importante de las matemáticas era la geometría, por lo que representaban los números y sus operaciones de forma geométrica. Por ejemplo, para representar el producto 4x6 dibujaban un rectángulo de lados 4 y 6, dividido en pequeños cuadraditos de lado 1. Así llegaron también al estudio y la representación de números irracionales, como el de la raíz cuadrada de 2.

Con esta utilización del razonamiento geométrico pueden verse algunas equivalencias algebraicas. Por ejemplo, mediante la figura 1 se prueba, por medio de cuadrados y rectángulos, lo siguiente:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Y, de forma análoga, se prueba también la igualdad con la diferencia, es decir, $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, así como otras identidades

FIG. 1



algebraicas, que son igualdades entre expresiones literales ciertas para cualquier valor de las letras.

Pero, a pesar de no utilizar unos métodos muy apropiados, ya antes de Euclides (que vivió aproximadamente entre los años 315 y 255 a.C.) y de su magna obra *Los elementos*, se llegaron a resolver problemas como el siguiente: «Encontrar un rectángulo del que se conoce la diferencia de los lados y cuya área sea equivalente a un cuadrado dado». Hoy este problema se plantearía, simplemente, como la resolución de una ecuación de la forma

$$x\,(x+a) = b^2,$$

siendo b el lado del cuadrado y a la diferencia entre el lado mayor y el menor del rectángulo.

Sin embargo, el autor que desde la Grecia clásica más contribuyó a avanzar hacia la futura álgebra fue Diofanto (ca. 200-ca. 285), en cuyo honor a un tipo de ecuaciones, posteriormente, se le dio el nombre de «diofánticas». Diofanto rompió la tendencia generalizada del razonamiento geométrico y comenzó a tratar los valores desconocidos como si fueran números y, por tanto, a operar con ellos como si se conocieran. También introdujo un formalismo para la unidad, las primeras potencias y los inversos, todo lo cual le llevó a resolver elegantemente diferentes problemas. Sin embargo, el camino que comenzó no fue seguido por los tratadistas posteriores y hubo que esperar a que los árabes, a partir de las traducciones de los autores griegos, conocieran y apreciaran sus avances para que se reemprendiera ese fecundo camino.

EL ÁLGEBRA DE LA INDIA

Los matemáticos del territorio de la actual India trabajaron a partir del siglo v con un álgebra que, al contrario que la griega, estaba desligada de forma absoluta de su representación geométrica y que trataba solo con números. Fue en la India donde, de hecho, se puso a punto el sistema de numeración decimal, basado en el principio

DIOFANTO DE ALEJANDRÍA

Poco se conoce de la vida de Diofanto, aunque se cree que nació alrededor del año 200 y murió en el último cuarto del siglo III. Debe su fama a la obra *Arithmetica*, donde realizó sus estudios de ecuaciones con variables de valor racional mediante problemas. Estos problemas matemáticos parece que monopolizaron su vida de tal forma que incluso su epitafio fue escrito en forma de problema, para cuya solución podría aplicarse el álgebra: «Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: los números pueden mostrar, ¡oh maravilla!, la duración de su vida. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte, de vello se cubrieron sus mejillas. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad».

Portada de una edición de 1575 de la *Arithmetica* de Diofanto, publicada en Basilea.

del valor relativo, con base diez y con la introducción de una cifra especial: el cero. Fue la única civilización que lo utilizó y, aunque no lo parezca, supone una gran complejidad conceptual, puesto que por una parte es un número como los demás, con el que se opera de la misma forma que con el resto, pero, al contrario que los otros, que representan la presencia de una cantidad, el cero supone la ausencia, el vacío. Con todos esos elementos llegaron a un sistema de numeración tan útil que en nuestro tiempo constituye el único conjunto de signos utilizado en todos los países del mundo, por todas las civilizaciones e idiomas de la Tierra.

También en la India se utilizaron por primera vez los números negativos. Su primera aparición es en un libro del año 628 escrito por un matemático llamado Brahmagupta (598-670), quien distinguió «los bienes», «las deudas» y «la nada», que son, respectivamente, los números positivos, los negativos y el cero. Los números negativos se representaban mediante un punto encima de las cifras. Más tarde, otra de las grandes civilizaciones orientales, la china, copió este método, pero distinguió los positivos de los negativos representando a los primeros en negro y a los segundos en rojo. Fue una decisión afortunada que todavía hoy se utiliza, especialmente en el contexto empresarial. La utilización de los números negativos permitió a los matemáticos indios encontrar las raíces negativas de las ecuaciones de segundo grado. También usaron, con menos escrúpulos lógicos que los griegos, los números irracionales. Todo ello dio lugar a avances significativos en la resolución de ecuaciones.

Uno de los más famosos matemáticos indios fue Bhaskara (1114-1185). Su libro más conocido es el *Lilawati*, escrito en verso y dedicado a su hija, que consiste en una colección de ejercicios, en parte destinada a la preparación de concursos públicos de resolución de problemas, certámenes muy extendidos en la época. A continuación puede leerse la traducción de tres de ellos:

> Los monos se divierten: de la ruidosa pandilla
> un octavo al cuadrado brinca en el bosque,
> doce gritan a la vez
> en lo alto de una verde colina.
> ¿Cuántos había en total?
>
> ¿Cuál es, hombre sabio, el número que multiplicado por 112 y sumado al cubo del número es igual a seis veces el cuadrado aumentado en 35?
>
> De un enjambre de abejas, 1/5 de las abejas vinieron hacia una flor de loto, 1/34 hacia un banano. Un número igual a tres veces la diferencia entre las dos cantidades precedentes, ¡oh bella de los ojos de gacela!, voló hacia un árbol Codaga [que tiene una corteza amarga

sucedáneo de la quinina]. Otra, por último, balanceándose, deambula por aquí y por allá en los aires, atraída a la vez por el delicioso perfume del jazmín y del pandano. Dime querida mía, ¿cuántas son estas abejas?

EL ÁLGEBRA DE LOS ÁRABES

Durante la época en que el álgebra avanzaba en la India tuvo lugar un fenómeno religioso-político de primera magnitud en la historia de la humanidad. Nos referimos a la propagación de la religión islámica, originaria de la península de Arabia y basada en las enseñanzas de Mahoma (570-632). En poco tiempo se sumaron a esa doctrina los habitantes de los territorios situados desde las fronteras del actual territorio español (en el oeste) hasta la India (por el este), a lo largo de todo el norte de África y buena parte de Asia, dando lugar a una unidad política, social y religiosa gobernada por un califa residente primero en Damasco (en la actual Siria) y luego en Bagdad (en territorio de Iraq). La utilización de una lengua común, el árabe, facilitó la transmisión de conocimientos en todo ese inmenso territorio.

Al ponerse en contacto con los matemáticos indios, y aprovechando también las traducciones de los griegos, los musulmanes hicieron grandes avances en el álgebra. El tratado más famoso sobre el tema, como ya se ha dicho, es el libro de Al-Juarismi, escrito a principios del siglo IX, *Compendio de cálculo por transposición y eliminación*, del que viene el nombre de «álgebra». En él hay numerosos ejemplos numéricos, como sucede con los autores indios, pero los procedimientos que utiliza son más rigurosos, a la manera de los griegos. De Diofanto tomó los dos procedimientos esenciales del álgebra: la transposición, que le permitió utilizar solo coeficientes positivos en sus ecuaciones, y la cancelación.

De los matemáticos griegos anteriores a Diofanto Al-Juarismi toma los procedimientos geométricos de demostración, que hace la búsqueda de soluciones sumamente complicada y muy trabajosa. A continuación se muestra un ejemplo de Al-Juarismi que

sirve para las ecuaciones del tipo $x^2+px=q$, con p y q positivos, que son los únicos números admitidos en esa época y hasta mucho tiempo después. Esto significa que, para él, eran muy diferentes las ecuaciones de la forma $x^2=px+q$.

Supongamos que se quiere resolver la ecuación $x^2+8x=48$. Utilizando el método gráfico, consistente en completar cuadrados, que es utilizable para todas las ecuaciones del tipo $x^2+px=q$, se construye en primer lugar un cuadrado de lado x, que será la solución de la ecuación (figura 2). Se le añaden a continuación cuatro cuadrados iguales, uno en cada uno de los vértices del anterior, de lados $8/4=2$ (en general, de lado $p/4$), como puede verse en la figura 3, y se completa el cuadrado de lado $(x+2)$ con los cuatro rectángulos de lados 2 y x marcados en la figura 4. El cuadrado que resulta tiene por área

$$S=x^2+4(2x)+4(2^2)=x^2+8x+16.$$

Y puesto que $x^2+8x=48$, sustituyendo en la expresión de S tendremos $S=48+16=64$, es decir, que el resultado del lado del cuadrado es 8 (porque $8^2=64$), y, como ese lado es $x+2+2$, resulta que $x=4$, que es la solución positiva de la ecuación dada.

FIG. 2

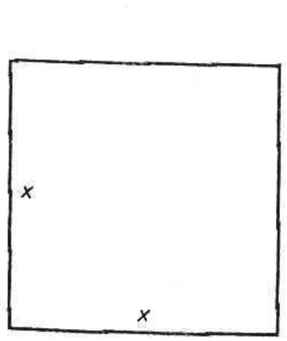


FIG. 3

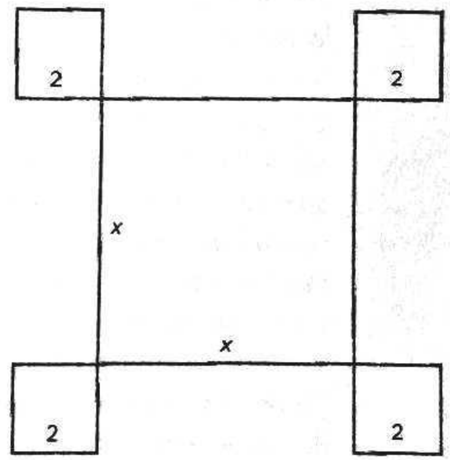
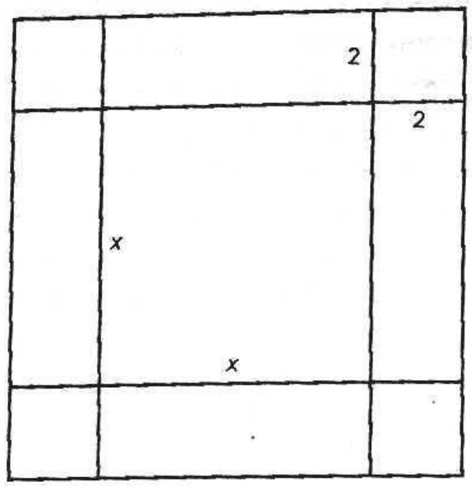


FIG. 4



El antes citado Omar Jayam resolvió algunas ecuaciones de tercer grado por intersección de dos cónicas y creó las reglas para tratar ciertas ecuaciones de cuarto grado, además de proponer una reforma del calendario extremadamente precisa que no llegó a llevarse a la práctica. La celebridad de Jayam, además de a sus cualidades de algebrista y geómetra, se debe sobre todo a su talento como poeta. Sus famosos cuartetos (o *rubaiyat*) son considerados parte del patrimonio de la literatura universal. Además, según relata el novelista libanés Amin Maalouf, Jayam fue el responsable de que a las incógnitas de las ecuaciones se las represente en todo el mundo con una «x». La forma en que lo cuenta, en su novela *Samarcanda*, biografía novelada del matemático y poeta, es la siguiente: «Durante los meses siguientes comienza la redacción de un libro muy importante consagrado a las ecuaciones cúbicas. Para representar la incógnita, en ese tratado de álgebra, Jayam utiliza el término árabe *shay*, que significa "cosa"; esta palabra, escrita "xay" en las obras científicas españolas, ha sido reemplazada progresivamente por su primera letra, x, que se ha convertido en el símbolo universal de la incógnita».

Los matemáticos posteriores llegaron a resolver las ecuaciones de segundo grado y se interesaron por las de tercer grado, e incluso por las de cuarto grado bicuadradas (que solo tienen las potencias x^4 y x^2). Pero una extensión tan grande del

campo del álgebra como era llegar a resolver ecuaciones generales de esos grados no estaba todavía a su alcance y habría que esperar algunos siglos y cambiar de continente para poder resolverlos.

LA RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

La ecuación general de segundo grado es, tras las agrupaciones necesarias en el primer miembro,

$$ax^2+bx+c=0,$$

donde a, b y c son números cualesquiera, positivos o negativos, y $a\neq 0$, porque, si no, sería de primer grado.

Para obtener la fórmula se utiliza la llamada «transformación de Tschirnhausen», que, al realizarse en un polinomio $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots$ de grado n, permite pasar a otro en el que el coeficiente del término de grado $(n-1)$ es igual a 0 haciendo el cambio de variable $y=x+(a_1/na_0)$.

Para hacer desaparecer el sumando bx se realiza lo siguiente:

$$y=x+(b/2a),$$

y a continuación:

$$x=y-(b/2a).$$

Por tanto, la ecuación de segundo grado quedaría así:

$$a(y-(b/2a))^2+b(y-(b/2a))+c=0,$$

de donde se obtiene

$$ay^2-(b^2/4a)+c=0,$$

que es una ecuación de segundo grado equivalente a la inicial, pero sin término de primer grado. Ahora es fácil obtener y^2 e y:

$$ay^2 = (b^2/4a) - c,$$

y a continuación:

$$y^2 = (b^2/4a^2) - (c/a),$$

o bien, poniendo el mismo denominador en las dos fracciones,

$$y^2 = (b^2/4a^2) - (4ac/4a^2) = (b^2 - 4ac)/(4a^2).$$

Es por esto por lo que los dos valores de y serán las dos raíces cuadradas (positiva y negativa) de esta última expresión:

$$y = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = x + (b/2a).$$

EL ÁLGEBRA EN LA EUROPA DEL RENACIMIENTO

El álgebra árabe alcanzó su máximo desarrollo hacia el siglo XII y después dejó de avanzar. A partir de ese momento, esos conocimientos comenzaron a expandirse por Europa, sobre todo de la mano de los comerciantes italianos que tenían relaciones de negocios con los árabes. En el año 1202 Leonardo Fibonacci (ca. 1170-1250) publicó su *Liber abaci*, que es el primer libro europeo en que aparece el sistema decimal de numeración, con las cifras llamadas desde entonces «árabes» por su origen, aunque, como se ha visto, en realidad son originarias de la India. A pesar de sus evidentes ventajas, no triunfaron con rapidez, sino que por diferentes resistencias sociales e institucionales tardaron bastante tiempo en llegar a ser de uso común. En concreto, más de doscientos años.

La evolución del álgebra en Europa a partir de las traducciones árabes fue lenta. El obstáculo principal que tuvieron que superar fue la forma en que los primeros algebristas describieron la formación de las ecuaciones y su solución: el lenguaje usual. Esto originó lo que se denomina «álgebra retórica». Después aparecieron algunas abreviaturas (álgebra sincopada) y, a continuación, de forma progresiva, la representación de los tamaños y de las cantidades mediante letras, y de las operaciones mediante símbolos (álgebra simbólica) se hicieron entre los siglos XV y XVII, acortando considerablemente la descripción de los cálculos. Los principales artífices de estos lentos progresos fueron alemanes, ingleses, flamencos, franceses e italianos. La mayoría de sus nombres ha caído en el olvido, pero podrían destacarse algunos. Los signos + y – los empleó por primera vez Johannes Widmann (ca. 1460–ca. 1498) en 1489; el signo = lo introdujo el inglés Robert Recorde (ca. 1510-1558) en 1557, argumentando que en matemáticas no había dos cosas más iguales que las rectas paralelas; y los símbolos de desigualdad (< y >) los aportó el inglés Thomas Harriot (1560-1621).

Pero el álgebra se desarrolló también de forma importante en cuanto a los métodos, sobre todo en la Italia de la primera mitad del siglo XVI, con el descubrimiento de fórmulas para la resolución de ecuaciones de tercer y cuarto grado, en las que solo intervenían las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir, además de la extracción de raíces. El nombre con que se conocía en Italia a la disciplina que trataba estos temas era o bien *álgebra* o *álgebra e muchabala*, pero también *arte maggiore* o *ars magna* («arte mayor») y *regla de la cosa*, siendo la «cosa» el valor desconocido que ha de hallarse, la «incógnita».

La forma en que se hacen los sucesivos descubrimientos es reflejo de las costumbres de los matemáticos de la época, que habían superado el oficio de contable, es decir, el cálculo de intereses compuestos y la resolución de los problemas financieros que aparecían como consecuencia de la expansión económica de la época. En cambio, disputaban duelos públicos en los que tenían que resolver problemas algebraicos. El que era vencido perdía parte de su fama y, con ello, a sus discípulos, que eran su medio de

vida. Por el contrario, el vencedor tenía la oportunidad de realizar giras por diversas ciudades, a la manera de los artistas. Esa es la razón de que los inventores o descubridores de nuevos métodos tuvieran buen cuidado en no divulgar sus hallazgos. Sin embargo, se puede atribuir a Escipione del Ferro (1465-1526) la resolución de la ecuación general de tercer grado, hacia 1515, encontrada también de forma independiente por Niccolò Fontana, llamado *Tartaglia* («Tartamudo») (1499-1557). La fórmula correspondiente fue publicada por primera vez por Girolamo Cardano (1501-1576) en un tratado titulado *Ars Magna* (1545), lo que provocó la cólera de *Tartaglia* y desató una larga polémica sobre la autoría de la misma y la oportunidad de su publicación. El *Ars Magna* presentaba también el método de Ludovico Ferrari (1522-1565) para resolver la ecuación de cuarto grado.

«Ten en cuenta también que es posible hacer ciertas concesiones a la amenidad, como es frecuente en los libros de historia.»

— **Girolamo Cardano, *De propria vita* (1576).**

RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES GENERALES DE TERCER Y CUARTO GRADO

Cualquier ecuación de tercer grado es equivalente a otra en la que el coeficiente del término de mayor grado es 1: basta dividir todos los coeficientes por el del término x^3. Luego la ecuación general de tercer grado es la siguiente:

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0.$$

Aplicando la llamada «transformación de Tschirnhausen», $x = y - (m/3)$, y haciendo las operaciones necesarias llegamos a

$$y^3 + ay + b = 0,$$

GIROLAMO CARDANO

Girolamo Cardano (1501-1576) fue un personaje polifacético. Amigo personal de Leonardo Da Vinci, se dedicó a la astrología, la medicina, la filosofía, entre otras disciplinas. En el ámbito de las matemáticas, fue autor del *Liber de ludo aleae*, primer libro relacionado con el mundo del azar, que redactó en la década de 1560. Este fue publicado de forma póstuma, quizá como una muestra de lo delicado del tema, que trataba de incertidumbres, en contraposición con el mundo de certezas de la sociedad de la época. No en vano en vida tuvo problemas con la Iglesia a causa de sus estudios de astrología. No fue una persona especialmente modesta, lo que le llevó a escribir una autobiografía, *De propria vita*, para dejar constancia de sus logros y sin obviar ningún detalle, ni siquiera su descripción física: «Mi estatura es mediana [...] soy algo estrecho de pecho, de brazos muy delgados, [...] la frente es ancha, [...] suelo llevar el cabello repelado y la barba corta [...]».

ecuación que resolver para tener las soluciones de la ecuación general.

Tras un proceso trabajoso se llega a la fórmula que nos da la solución de la ecuación de tercer grado, la llamada «fórmula de *Tartaglia*-Cardano»:

$$y = \sqrt[3]{\frac{-b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{27b^2 + 4a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{27b^2 + 4a^3}{27}}}.$$

Tiene una forma complicada y su aplicación es difícil casi siempre, salvo algunos casos. Es destacable la complejidad y sofisticación del método, encontrado hace más de cuatro siglos.

Para resolver, por ejemplo, la ecuación $x^3-3x^2+9x-5=0$, se realiza en primer lugar el cambio de variable $x=y+1$, que transforma la ecuación en $y^3+6y+2=0$. Aplicando la fórmula de *Tartaglia*-Cardano, el resultado es el siguiente:

$$y=\sqrt[3]{-1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{108+864}{27}}}+\sqrt[3]{-1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{108+864}{27}}}=\sqrt[3]{-1+\frac{1}{2}6}+\sqrt[3]{-1-\frac{1}{2}6}=$$
$$=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{-4}.$$

Hay, pues, tres raíces, una real y dos imaginarias:

$$x=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}+1 \quad x=-\frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}}{2}+1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})i.$$

UNA FÓRMULA MUY POÉTICA

Tartaglia facilitó la solución de la ecuación $x^3+px=q$ en forma de tercetos:

Quando che'l cubo con le cose appresso
se agguaglia a qualche numero discreto:
trovan dui altri, diferente in esso.
Dapoi terrai, questo per consueto,
che'l loro produtto, sempre sia eguale
al terzo cubo della cose neto;
el residuo poi suo generale,
delli lor lati cubi, ben sottratti
varra la tua cosa principale.

Cuando el cubo está con las cosas
y se iguala a un número completo,
encuentra otros dos números de los cuales sea diferencia.
Después considerarás rutinario
que su producto sea siempre igual
al tercio del cubo de la cosa.
Entonces el resultado general
de sus raíces cúbicas restadas
te dará el valor de la cosa principal.

Otro ejemplo es el de la ecuación típica que resuelve Cardano: $x^3+6x=20$, o $x^3+6x-20=0$ ($a=6$, $b=-20$). Utilizando la fórmula el resultado es el siguiente, cuyo valor real es $x=2$:

$$x=\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}+\sqrt[3]{10-\sqrt{108}}.$$

En cuanto a la solución de la ecuación general de cuarto grado, el método utilizado es el de Ferrari. Se comienza con una ecuación sin término en x^3 (haciendo la transformación de Tschirnhausen) y con el coeficiente de x^4 igual a 1: una ecuación de la forma $x^4+ax^2+bx+c=0$.

«Puesto que este arte [el de las reglas algebraicas] sobrepasa cualquier humana sutileza y la perspicacia del talento normal y es un verdadero regalo celestial y una prueba clara de la capacidad de las mentes humanas, cualquiera que se aplique a ella creerá que no hay nada que no pueda ser entendido.»

— Girolamo Cardano, *Ars magna* (1545).

Teniendo en cuenta que si se desarrolla el cuadrado de $(x^2+a/2+\delta)$, los dos primeros términos serían x^4+ax^2, por lo que, si igualamos la expresión con la ecuación x^4+ax^2+bx+c,

$$(x^2+a/2+\delta)^2=x^4+ax^2+bx+c.$$

El resultado, por tanto, sería una ecuación de tercer grado, que se resuelve por el método de Cardano. De esta manera, se llega a descomponer la ecuación de cuarto grado en dos trinomios de segundo grado, cuyas cuatro raíces (dos de cada uno de ellos) son las soluciones de la ecuación original. La utilidad práctica del método es escasa, pero es importante señalar que así se obtiene una expresión para las soluciones de la ecuación general de cuarto grado en las que solo intervienen los coeficientes de la ecuación $x^4+ax^2+bx+c=0$ y raíces hasta de cuarto grado.

EL ÁLGEBRA SIMBÓLICA

A finales del siglo XVI se produjo un gran avance, especialmente en el momento en que el matemático francés François Viète (1540-1603) introdujo un simbolismo literal que codificó las notaciones y, además, demostró las reglas del cálculo literal, aplicándolas a la resolución general de las ecuaciones de segundo y tercer grado.

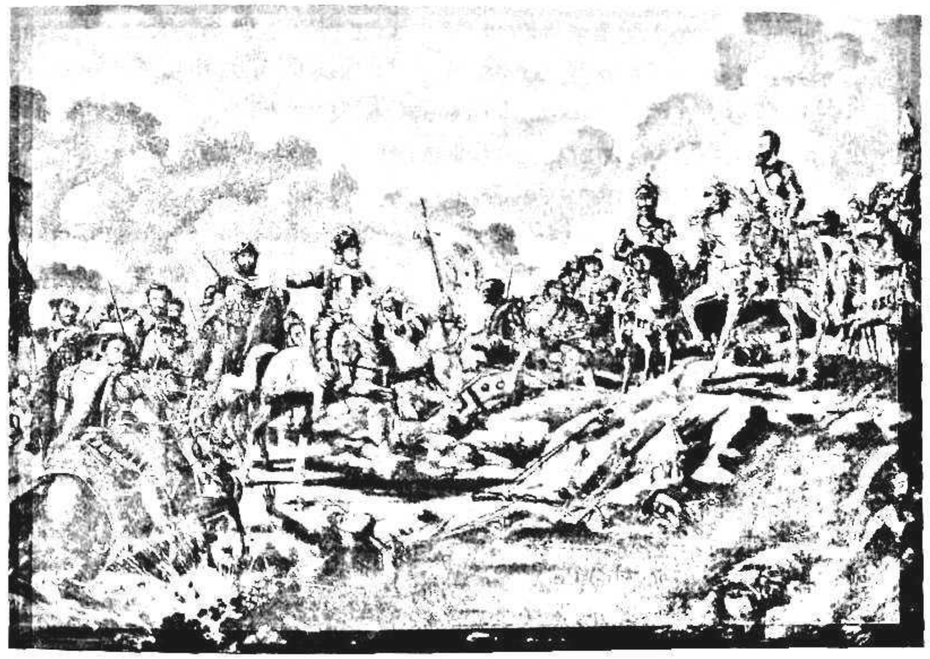
La solución elegida por Viète era a la vez sencilla y eficaz. Las vocales representan las cantidades desconocidas mientras que las consonantes simbolizan las cantidades conocidas, un método exactamente contrario al actual. Adopta además los símbolos, pero le falta todavía una notación apropiada para las potencias. Es un álgebra moderna en algunos aspectos, pero a la vez antigua por la utilización de palabras o abreviaturas. Usaba *in* para la operación de multiplicar, *q* (abreviatura de *quadratus*) para los cuadrados, *c* (abreviatura de *cubus*) para los cubos y *aequatur* para la igualdad.

De esa forma, lo que hoy se representaría como la ecuación $3ax^2-2bx+x^3=D$, Viète lo escribía así: la incógnita x la designaba por A; los parámetros a y b eran B y F, y el término D lo llamaba solido. Así quedaba B 3 in A q - F 2 *in* A + A c *aequatur* D solido.

Ese avance en la formalización del álgebra continuó con René Descartes (1596-1650), considerado el primer gran filósofo moderno, quien dedicó a las matemáticas una gran parte de su vida. Convencido de que la realidad entera respondía a un orden racional, su propósito era crear un método que hiciera posible alcanzar en todo el ámbito del conocimiento la misma certidumbre que proporcionan en su campo la aritmética y la geometría. Su método, expuesto en el *Discurso del método*, se compone de cuatro preceptos o procedimientos: no aceptar como verdadero nada de lo que no se tenga absoluta certeza de que lo es, descomponer cada problema en sus partes mínimas, ir de lo más comprensible a lo más complejo y, por último, revisar por completo el proceso para tener la seguridad de que no hay ninguna omisión. En uno de los apéndices de la obra, llamado *La geometría*, Descartes expuso sus ideas sobre geometría de coordenadas y álgebra, ideas que tendrían una enorme repercusión en el futuro de las matemáticas. En esencia, su objetivo era la reconstrucción de todas las

VIÈTE Y LOS CÓDIGOS SECRETOS

El francés François Viète (1540-1603) fue un hombre de leyes, pero, a la vez, un gran estudioso de las matemáticas, a las que se dedicaba por afición. En esa faceta tuvo un destacado papel como criptógrafo del rey de Francia Enrique IV. Algunas anécdotas históricas lo relacionan con diversos sucesos acaecidos en la corte de Felipe II de España, donde se había desarrollado un método de cifrado, la «nueva cifra general», que era utilizado en todas las comunicaciones diplomáticas. Este método era juzgado de indescifrable, a pesar de ser un simple cifrado de sustitución. En un momento dado, una de las cartas que el monarca español había dirigido a Alejandro Farnesio, duque de Parma, cayó en manos de Enrique IV de Francia. Este encargó a Viète que la descifrara, algo que logró tras varios meses de trabajos. No fue ajena a este conocimiento la victoria militar de Enrique IV en Ivry. Felipe II protestó ante el Papa acusando al rey francés de usar la magia negra en su labor de criptoanálisis, pero el Pontífice no le hizo ningún caso, entre otras muchas razones porque también sus especialistas en criptoanálisis habían descifrado mensajes españoles desde hacía tiempo.



Óleo del pintor francés Théodore Chrétin (1797-1865) en el que puede verse a Enrique IV en la batalla de Ivry, expuesto en el Museo Nacional del Palacio de Versalles.

matemáticas desplazando el foco de la geometría (como había sucedido desde *Los elementos* de Euclides) al álgebra, a partir de la cual se podrían obtener los resultados geométricos: se llega así a la geometría analítica. Además, utilizó la notación simbólica actual, y mostró que puede resultar cómodo poner las ecuaciones con todos los términos en un mismo miembro e igualadas a cero.

Descartes introdujo también un sistema de coordenadas, en el que cada punto del plano queda representado por un par de números (o tres, si el punto está en el espacio): son las coordenadas cartesianas. Una ecuación es entonces un lugar geométrico, una curva en el plano o una superficie en el espacio. El ejemplo más sencillo es una ecuación de primer grado, como $2x + 3y = 7$, que es una recta. Otras ecuaciones más complicadas representan circunferencias, elipses, parábolas, esferas…

Estas ideas supusieron un cambio trascendental en las matemáticas hasta el punto de acabar con la supremacía de la geometría a favor del álgebra.

A lo largo de los siglos XVII y XVIII el álgebra adquirió una forma moderna con la unificación y generalización del simbolismo, y la clasificación y el desarrollo de los diferentes métodos. Pero el papel fundamental que desempeñaba en las matemáticas se vio relegado por los nuevos descubrimientos (el cálculo infinitesimal y la geometría analítica, sobre todo), aunque se fuera perfeccionando con la extensión de sus aplicaciones. El álgebra, eso sí, se aprovechó de la ventaja de tener las ecuaciones como expresiones igualadas a 0, porque le permitió relacionarse con las propiedades de una función con la misma expresión (puesto que una ecuación sería una igualdad de la forma $f(x) = 0$).

Tras la introducción de los números complejos, supuso un gran avance el llamado teorema fundamental del álgebra de D'Alembert (1746), comentado anteriormente, demostrado por Gauss a finales del siglo XVIII.

Una vez que eran conocidos ya los procedimientos de resolución de las ecuaciones generales hasta de grado cuatro, en las que en todos los casos solo se utilizaban las cuatro operaciones y radicales de orden como máximo igual al grado de la ecuación, parecía lógico pensar que sería posible encontrar procedimientos similares para las ecuaciones de cualquier grado. Pero ninguna de las tentativas resultó fructífera, por lo que diversos matemáticos fueron buscando métodos para poder obtener las raíces de una ecuación con una aproximación prefijada. Encontraron diferentes métodos, que siguen vigentes en la actualidad, además de Descartes, Isaac Newton (1642-1727), Colin Maclaurin (1698-1746) o Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813).

Poco a poco se fue abriendo paso otra vía, que iba a demostrar que los fracasos en la resolución de la ecuación general de cuarto grado no eran casuales. Y es que la ecuación general de grado superior a cuatro no se puede resolver por medio de radicales, una imposibilidad que demostró primero Niels Henrik Abel y después el protagonista de estas líneas, Évariste Galois.

CAPÍTULO 2

Ciencia, matemáticas y revolución

Évariste Galois nació en un momento clave de la historia de Francia: Napoleón continuaba en el poder, dando forma de Imperio a los ideales de una Revolución que había dado carpetazo al Antiguo Régimen y facilitaba avances científicos tan importantes como la creación de un nuevo sistema de pesos y medidas o la formulación de una moderna teoría de las probabilidades, de manos del astrónomo, físico y matemático Pierre-Simon de Laplace.

Si en la vida de todas las personas tiene una influencia decisiva la sociedad en la que vive, esto es todavía más evidente en la época en la que le tocó nacer a Évariste Galois. Francia, tras la Revolución iniciada en 1789 con los simbólicos episodios del juramento del Juego de Pelota y la toma de la cárcel de la Bastilla, se hallaba en un momento clave. La historia se había acelerado con el desmoronamiento del Antiguo Régimen y el ascenso social de la burguesía urbana. Cambiaron las instituciones y los métodos de enseñanza, así como el papel de la ciencia y la influencia de los matemáticos en la vida cotidiana.

En muchos de los avances de la época participó de forma destacada toda una pléyade de científicos y matemáticos que, en algunos casos, también tuvieron una importante presencia política. Algunas son historias de éxito, como el diseño de un nuevo sistema educativo acorde con los tiempos y las necesidades científicas —que influyó de forma directa en la corta vida de Galois—, o la creación de un nuevo sistema métrico, que facilitaría los intercambios, evitando los abusos de los poderosos, comunes en la época. Otros, en cambio, no fueron tan exitosos, o incluso directamente fracasaron, como la reforma del calendario, vigente solo entre 1792 y 1806. También tuvieron lugar en esta época la recopilación y el avance de los conocimientos teóricos de astronomía y el inicio de la teoría de la probabilidad de la mano de Pierre-Simon de Laplace.

LA MEDICIÓN DEL MERIDIANO Y EL SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

En una de las primeras sesiones de la Asamblea Francesa posterior a la Revolución, la del 8 de mayo de 1790, se trató el tema de la creación de un nuevo sistema de pesos y medidas. Un poco más tarde, el 12 de junio de ese mismo año, el marqués de Condorcet (1743-1794) propuso en un discurso ante la Asamblea Nacional crear una «unidad de longitud natural e invariable» y un sistema en el que «si se consideran las medidas de un mismo tipo ordenadas en orden decreciente, cada una sea diez veces menor que la que la precede inmediatamente y diez veces mayor que la que le sigue». El objetivo era acabar con el descontrol y caos existentes en los sistemas de medidas, y que sirviera, dentro del espíritu de fraternidad y unidad, a universalizar la Revolución a todos los países y a todas las personas. Las principales unidades que iban a imponerse serían el litro, el gramo, el área y, por supuesto, el metro.

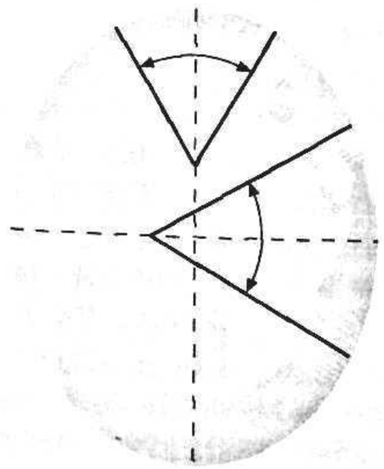
En ese momento, las medidas eran, en muchos casos, no ya nacionales, sino locales, y no poseían ninguna relación lógica entre ellas. Por este motivo las relaciones económicas eran dificultosas. Las unidades de medida estaban relacionadas con las partes del cuerpo humano. En la Francia de la época eran el pulgar (*le pouce*), el pie (*le pied*), el paso (*le pas*), el palmo (*l'empan*), el codo (*la coudée*) y el brazo (*la brasse*). Un codo eran dos palmos, y un pie, doce pulgares. A partir de ahí se definían otras como la toesa (*la toise*), que eran doce pies; la vara de París (18 pies), la vara ordinaria (20 pies) o la vara de aguas y bosques (22 pies). Estas medidas estaban marcadas en la pared de las ciudades en que se realizaban mercados importantes. El sistema era, pues, muy complejo.

La Asamblea Nacional decidió pedir a la Academia de Ciencias su autorizada opinión sobre el asunto, y con ese objetivo nombró una comisión (formada por los famosos científicos Jean-Charles de Borda, Pierre-Simon de Laplace, Joseph-Louis de Lagrange, Gaspard Monge y el marqués de Condorcet) que, el 19 de marzo de 1791, presentó tres alternativas para elegir una unidad de medida de longitud aceptable «para todos los tiempos, para todos los pueblos».

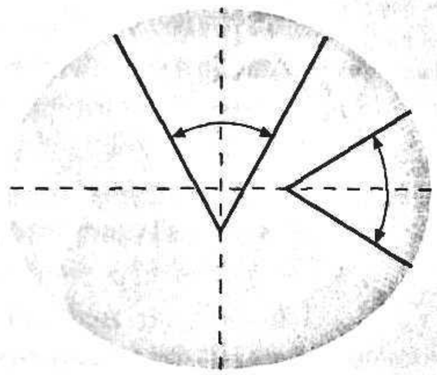
— La longitud de un péndulo cuyo semiperíodo fuera de un segundo a 45 grados de latitud.
— La cuarta parte del ecuador.
— La cuarta parte de un meridiano.

LA FORMA DE LA TIERRA

Desde los tiempos de la Grecia clásica era conocida la esfericidad de la Tierra y su tamaño aproximado. Hacia finales del siglo XVII Christiaan Huygens e Isaac Newton dedujeron que la Tierra, debido a la fuerza centrífuga, tenía que estar achatada por los polos, mientras que la opinión mayoritaria en Francia sostenía, en cambio, que el planeta se alargaba por los polos, a la manera de un balón de rugby. Así lo defendía el astrónomo Giovanni Cassini (1625-1721). Para acabar con la controversia, la Academia de Ciencias francesa acordó medir con precisión la longitud del arco correspondiente a un grado de ángulo central sobre un meridiano cercano al ecuador terrestre y en otro cercano al Polo Norte. Para ello organizó dos expediciones: una a Laponia encabezada por los astrónomos franceses Alexis-Claude Clairaut y Pierre-Louis Maupertuis, en la que participó también el físico sueco Anders Celsius, y otra al virreinato del Perú, colonia española entonces, en el territorio de lo que hoy es Ecuador (con el matemático y geógrafo Charles-Marie de La Condamine y los astrónomos Louis Godin y Pierre Bouguer). La primera tuvo lugar en los años 1736-1737 y confirmó las teorías de Newton. La segunda comenzó en 1735 y logró medir tres grados de meridiano, confirmando las medidas laponas. La Tierra, pues, tenía la forma de una gran naranja: una esfera achatada por los polos.



Elipsoide de Cassini



Elipsoide de Newton/Huygens

El día 26 de marzo de 1791 la Asamblea Nacional acordó que la más adecuada era la tercera opción: «La cuarta parte de un meridiano terrestre será la unidad real de medida y la diezmillonésima parte de esta longitud será la unidad corriente». También se decidió que el nombre de la unidad sería «metro» (del griego *metron*, medida), y se instauró el sistema decimal para los múltiplos y divisores de las unidades.

«Algún matemático dijo que el verdadero placer no reside en el descubrimiento de la verdad, sino en su búsqueda.»

— Lev Tolstói.

Se tenía así una unidad de medida utilizable en cualquier lugar de la Tierra y, además, un sistema que permitía con facilidad cambiar a múltiplos o divisores. La decisión implicaba que había que medir con precisión la longitud del meridiano elegido, algo que entrañaba bastantes dificultades (aunque no era la primera vez que científicos franceses se proponían una tarea similar). La primera era la elección del meridiano que convenía medir: se optó por el que pasa por Dunkerque (N 51°2'9,20"), por el canal de la Mancha y Barcelona (N 41°21'44,95"), y que es también el meridiano de París.

Los trabajos comenzaron el 25 de junio de 1792. Fueron dirigidos por los astrónomos franceses Pierre Méchain (1744-1804) y Jean-Baptiste Delambre (1749-1822), quienes definieron una red de puntos de triangulación situados en montañas cercanas al meridiano, a partir de los que fueron tomando medidas de las distancias entre ellos, con la máxima precisión posible (para la época). La precisión del procedimiento descansaba en la determinación matemática de la longitud de uno de los lados de un triángulo, y en la exactitud en la medida de los ángulos de todos los triángulos.

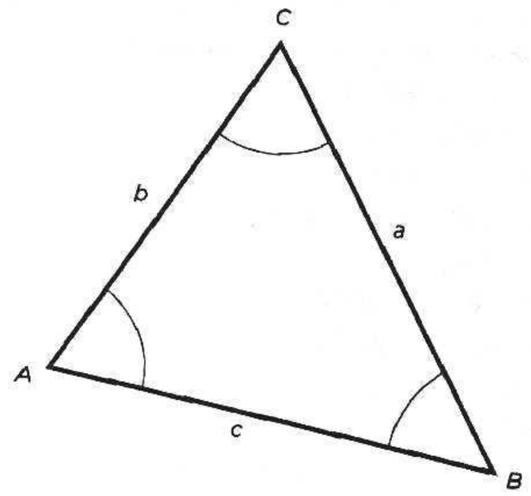
Las medidas realizadas condujeron a la proclamación del metro como unidad de medida por la ley del 19 de Frimario del año VIII (que equivale al 10 de diciembre de 1799), firmada por Napoleón, primer cónsul en ese momento. Previamente, el nuevo sistema de pesos y medidas había sido presentado en el conside-

LA TRIANGULACIÓN DE MÉCHAIN Y DELAMBRE

El método de triangulación se basa en una idea no matemática muy simple y provechosa: es mucho más fácil medir ángulos que distancias. Y, además, en un resultado de trigonometría sencillo y fácil de aplicar, el teorema de los senos: «En un triángulo cualquiera *ABC* de lados *a*, *b* y *c* se cumple que

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}».$$

Con él, conocido un lado del triángulo y los ángulos se puede calcular el resto de los lados.



Basta con medir con gran precisión una longitud inicial, la base, y a partir de ahí ir haciendo cálculos. Se establece un triángulo con dos vértices en los extremos de la base y el tercero en un punto elevado para que desde cada vértice puedan verse los otros dos y puedan medirse los tres ángulos. A partir de ese triángulo inicial se construyen por el mismo procedimiento dos cadenas de triángulos (con los otros dos lados), cuyos vértices, los llamados «vértices geodésicos», se toman en lugares elevados, como torres de castillos o iglesias o cimas de montañas, para verlos desde lejos (y medir los ángulos) y estables (por si hay que repetir la medición). La cadena de triángulos tenía dos problemas: ni estaban en el mismo plano, ni los lados estaban exactamente alineados con el meridiano. Por eso había que realizar dos tipos de proyecciones: una sobre un mismo plano de referencia y otra proyectando algunos de los lados en la dirección del meridiano para que lo recubrieran.

rado primer congreso científico internacional de la historia, celebrado en París, donde Delambre y Méchain presentaron sus éxitos ante los representantes de nueve países europeos. En la comisión francesa, además de los astrónomos, figuraban Joseph-Louis de Lagrange, Adrien-Marie Legendre y Pierre-Simon de Laplace.

A pesar de su racionalidad y de las ventajas que conllevó, la aceptación del nuevo sistema métrico decimal no fue rápida en ningún país, ya que se oponía directamente a la fuerza de la costumbre establecida. Poco a poco, sin embargo, se acabó extendiendo por todo el mundo, hasta el punto de que hoy es el método de medida universal, salvo la pervivencia de algunas de las medidas del sistema sajón (en ámbitos muy particulares, como la medida del petróleo en barriles o la de los televisores, en pulgadas).

Después de la muerte de Méchain, Delambre publicó en 1806 el primer tomo del libro *Base du système métrique décimal* (*Fundamentos del sistema métrico decimal*), o *Mesure de l'arc du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelone* (*Medición del arco del meridiano comprendido entre los paralelos de Dunkerque y Barcelona*), donde dio cuenta de las ideas matemáticas que desarrollaron, las medidas realizadas y también los acontecimientos que vivieron en la misión.

LA REFORMA DEL CALENDARIO

En un mundo en que las cantidades vienen regidas por un sistema de numeración decimal, y las magnitudes por un sistema métrico también decimal, no deja de ser raro que una hora tenga 60 minutos que, a su vez, se dividen en 60 segundos, y que los días tengan 24 horas, divididas en dos grupos de 12. Este antiguo sistema ideado por los antiguos asirios (o babilonios) pervive todavía hoy, y también es patente en el hecho de que haya 12 meses.

En la misma época que se implantaba el sistema métrico se emprendió en Francia la reforma del calendario, que pasó a llamarse «republicano». Utilizando también un sistema decimal, un decreto del 5 de octubre de 1793 proclamaba lo siguiente: «El día, desde medianoche hasta la medianoche siguiente, se divide en diez partes, cada parte a su vez se compone de diez partes, y así sucesivamente hasta la duración de tiempo más pequeña que se pueda medir». A cada una de esas partes se las llamaba horas (por lo cual el día tenía diez de las nuevas horas), y a su vez se subdividían de la siguiente manera: «La centésima parte de una hora es denominada minuto decimal; la centésima parte de un minuto es denominada segundo decimal».

Lo que no varió fue el número de meses. El año se dividía en 12 meses de 30 días cada uno, más 5 días complementarios, aunque el mes se dividía en tres *décades* o semanas de 10 días. Se comenzó a contar desde el año de su implantación (que fue el año I) y se cambiaron los nombres de los meses, para relacionarlos con la situación meteorológica o de labores agrícolas en el campo francés: vendimiario (del 22 de septiembre al 21 de octubre), brumario (del 22 de octubre al 20 de noviembre), frimario (del 21 de noviembre al 20 de diciembre), nivoso (del 21 de diciembre al 19 de enero), pluvioso (del 20 de enero al 18 de febrero), ventoso (del 19 de febrero al 20 de marzo), germinal (del 21 de marzo al 19 de abril), floreal (del 20 de abril al 19 de mayo), pradial (del 20 de mayo al 18 de junio), mesidor (del 19 de junio al 18 de julio), termidor (del 19 de julio al 17 de agosto) y fructidor (del 18 de agosto al 21 de septiembre).

Este calendario comenzó a utilizarse de forma oficial a comienzos del año republicano III, concretamente el 22 de septiembre de 1794. Sin embargo, su uso obligatorio fue suspendido el 7 de abril de 1795 (18 germinal del año III), y rápidamente cayó en desuso. Hubo otro intento de «decimalizar», también en Francia (1897), la medida del tiempo, a iniciativa del matemático Henri Poincaré (1854-1912), pero también gozó de poco éxito.

Como anécdota de la pervivencia del sistema, en el palacio de las Tullerías de París se mantuvo un reloj con el sistema republicano hasta 1801 y el científico Pierre-Simon de Laplace se ordenó fabricar uno para su uso personal, llegando a trabajar con él en algunos de sus complicados cálculos.

LA EXPEDICIÓN A EGIPTO

En el año 1798, nueve años después del estallido de la Revolución, la situación política en Francia ya estaba más que consolidada, a pesar de los problemas internos y externos. El violento período del Terror (1793-1794) quedaba ya bastante atrás y el régimen del Directorio (iniciado el 4 de brumario del año IV, en otoño de 1795) había dado un giro conservador a los turbulentos inicios revolucionarios. Fue en ese contexto donde comenzaría a despuntar una figura que iba a ser clave para el destino de Francia: Napoleón Bonaparte (1769-1821), quien llegaría a ser primero cónsul (1799-1804) y, más tarde, emperador de los franceses (1804-1814). Su fulgurante carrera tuvo un punto de inflexión en 1796, cuando, con tan solo veintiséis años, fue colocado al frente del ejército galo en Italia y se hizo con el norte del país transalpino.

El único gran enemigo exterior era Inglaterra, y el joven militar corso fue nombrado jefe del ejército costero destinado a luchar contra ella. Como la superioridad naval inglesa le impedía desembarcar en la isla británica, ideó una forma indirecta para debilitarla: una expedición a Egipto, clave en la ruta hacia la India, que era la base del Imperio británico. La expedición fue un fracaso desde el punto de vista militar: consiguió diversas victorias por tierra, pero sufrió una dura derrota por mar, por lo que quedó bloqueado en territorio egipcio y sin posibilidad de recibir refuerzos. Esta circunstancia llevó, finalmente, a la rendición del ejército francés. Culturalmente, sin embargo, la experiencia en Egipto fue todo un éxito: una «conquista científica», en palabras del propio Napoleón.

De hecho, junto a la habitual maquinaria militar, embarcaron hacia Egipto 154 científicos en la llamada «Comisión de las Ciencias y de las Artes del Ejército de Oriente». Fueron reclutados por el matemático Gaspard Monge (1746-1818), el químico Claude-Louis Berthollet (1748-1822), inventor de la lejía y profesor de la *École normale* (Escuela Normal), y el geólogo Déodat Gratet de Dolomieu (1750-1801). Este último, para convencer a sus alumnos de que se enrolaran, y dado que incluso el destino de la armada era secreto, les dijo: «No puedo decirles adónde vamos ni cuánto tiempo vamos a estar allí ni con qué objetivo, pero puedo asegurarles que es un lugar para conquistar gloria y saber».

En la expedición, además, estaban, entre otros, Nicolas-Jacques Conté (1755-1805), inventor de la mina de lápiz, o el naturalista Étienne-Geoffroy Saint-Hilaire (1772-1844), formulador de la teoría de los análogos y el principio de las conexiones entre las especies de animales. También se realizaron diferentes obras de ingeniería e infraestructura e iniciaron los estudios de la construcción de un canal que comunicara los mares Mediterráneo y Rojo partiendo de Suez.

LA INNOVADORA TECNOLOGÍA FRANCESA

Además de las ventajas políticas, Napoleón era consciente de la importancia de las novedades tecnológicas para resolver los problemas de su ejército. A él estuvo unido, por ejemplo, el inicio de la industria moderna del empaquetado con los métodos de preservación de alimentos. Al principio se usaba la salazón y el ahumado, pero, en 1795, consciente de que «los ejércitos avanzan con el estómago», Napoleón ofreció una recompensa a quien inventara un método de conservación. Fue un pastelero, Nicolas Appert (1749-1841), quien ganó el premio, con un procedimiento que consistía en cocinar en cazuelas normales y luego introducir los cocinados en botellas de cristal herméticas que se sellaban con alambres y se esterilizaban metiéndolas en agua hirviendo. Más tarde, a partir de 1810, se comenzaron a utilizar envases de hojalata, en el inicio de los modernos procesos de conservación de alimentos que continúan en nuestros días. Existe también otra versión no confirmada según la cual la popular *baguette*, el tipo de pan francés más conocido y extendido por todo el mundo, fue creado durante la campaña rusa, siendo el mismo Napoleón quien expuso las dimensiones (largo y ancho) que debía tener el pan para que, a pesar del exceso de ropa vestida por los soldados, pudieran llevarlo en los bolsillos.

Nicolas Appert, el inventor del método de preservación hermética de los alimentos.

Una vez en territorio egipcio, llevaron a cabo una completa descripción de la fauna y la flora de la región —incluidas algunas especies hasta entonces desconocidas para ellos, que pusieron en la órbita europea—, así como de todos los monumentos de la época faraónica, lo que fue el origen de una nueva ciencia: la egiptología.

En 1802, Napoleón autorizó la publicación de los descubrimientos de la comisión en una obra monumental en varios tomos, la *Descripción de Egipto*, que incluía 974 planchas, un atlas de 47 páginas, ensayos académicos y un índice detallado. Las tareas de preparación de una publicación de tal magnitud hicieron que la edición imperial original no comenzara hasta 1809. Pero resultó tan popular que, incluso ya derrocado Napoleón, se publicó una segunda edición durante la Restauración de Luis XVIII.

Pero quizás el mayor descubrimiento que se realizó, por su repercusión posterior, fue la piedra de Rosetta, que permitió años más tarde a Jean-François Champollion (1790-1832), filólogo y padre de la egiptología, descifrar el lenguaje jeroglífico de los antiguos egipcios, hasta entonces un conjunto de símbolos sin sentido. En julio de 1799 los soldados cavaban trincheras en torno al fuerte de Rachid o Rosetta cuando uno de ellos topó con una gran piedra de basalto oscuro en la que había inscripciones en tres lenguas: griego antiguo, demótico —escritura egipcia antigua utilizada por la administración y en la literatura— y jeroglífico. Y todo parecía indicar era el mismo texto en las tres escrituras diferentes. El oficial responsable hizo sacar copias de las inscripciones, que trataban de una sentencia del rey Ptolomeo y estaban fechadas dos mil años antes, en el 196 a.C. Cuando se rindieron los franceses a las tropas inglesas en 1801, estos se quedaron con la piedra, junto con el resto del botín de guerra, y la mandaron a Londres, donde se conserva y exhibe en el Museo Británico. Por suerte, las copias sí llegaron a Francia, y sobre ellas trabajó Champollion, quien, a partir del texto griego, y cotejándolas con otras inscripciones en obeliscos, buscó las equivalencias en los jeroglíficos y estableció en 1822, después de un formidable logro intelectual, la manera de descifrarlos, lo que abrió la puerta a toda la información del Antiguo Egipto.

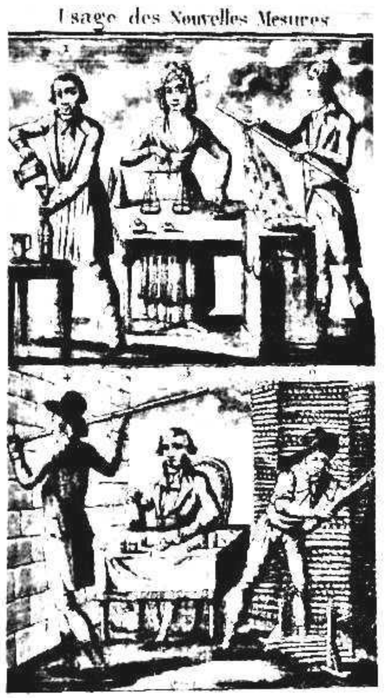


FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
Representación artística de la piedra de Rosetta, hoy en el Museo Británico.

FOTO SUPERIOR DERECHA:
Representación del calendario republicano obra de Philibert-Louis Debucourt (1755-1832).

FOTO INFERIOR IZQUIERDA:
Retrato del marqués de Condorcet.

FOTO INFERIOR DERECHA:
Grabado de 1800 que ilustra el uso del nuevo sistema de medidas.

LAPLACE, LA MODERNA TEORÍA DE LAS PROBABILIDADES Y LA ASTRONOMÍA

Napoleón tuvo una estrecha relación con la ciencia y las matemáticas. Como consecuencia de sus hazañas en la campaña de Italia, se le otorgaron los apelativos de «geómetra de las batallas» y «mecánico de la victoria», y en ella se hizo acompañar de dos científicos: el geómetra Gaspard Monge y el químico Claude-Louis Berthollet. El 25 de diciembre de 1797 fue elegido miembro del Instituto de Francia, cubriendo la vacante de Lazare Carnot, y en 1801 fue nombrado presidente de la Academia de Ciencias.

«El progreso y el perfeccionamiento de las matemáticas están íntimamente ligados a la prosperidad del Estado.»

— Napoleón Bonaparte.

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) es el responsable de algunos de los mayores avances de la probabilidad, asunto sobre el que empezó a escribir siendo muy joven: no en vano, a los veinticuatro años ya había redactado su primera memoria sobre probabilidad, centrándose en los aspectos matemáticos y obviando sus fundamentos filosóficos, tan presentes en estudios anteriores. Pero fue en su monumental libro de 1812 *Teoría analítica de las probabilidades*, publicado muy poco después del nacimiento de Évariste Galois, donde expuso los principios y las aplicaciones de lo que llamaba «geometría del azar», mediante la introducción del análisis matemático en el estudio de los fenómenos aleatorios.

Es conocida la forma en que Laplace expresa lo que significa el cálculo de probabilidades: «La teoría de las probabilidades no es en el fondo más que el buen sentido (o sentido común) reducido al cálculo: hace apreciar con exactitud lo que los espíritus justos sienten por una especie de instinto, sin que puedan a menudo darse cuenta». Y también la manera en que destaca la importancia de la teoría que trata: «Es notable que una ciencia que comenzó con las consideraciones de juegos de azar había de llegar a ser el objeto más importante del conocimiento humano. Las cuestiones más importantes de la vida constituyen en su mayor parte, en realidad, solamente problemas de probabilidad». Era un comentario profético, ya que en la actualidad no hay progreso en ninguna ciencia ni actividad humana que se realice sin la intervención de la probabilidad.

La importancia de Laplace se ha reconocido también popularmente: se llama «regla de Laplace» a la forma más conocida de asignar probabilidades: la proporción (o cociente) entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.

Ocho años después de su *Teoría analítica de las probabilidades*, Laplace explicó su conocida profesión de fe «determinista» en el *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*, cuyo fin era dar a conocer los principios y aplicaciones contenidos en la *Teoría analítica*, pero sin aparato matemático:

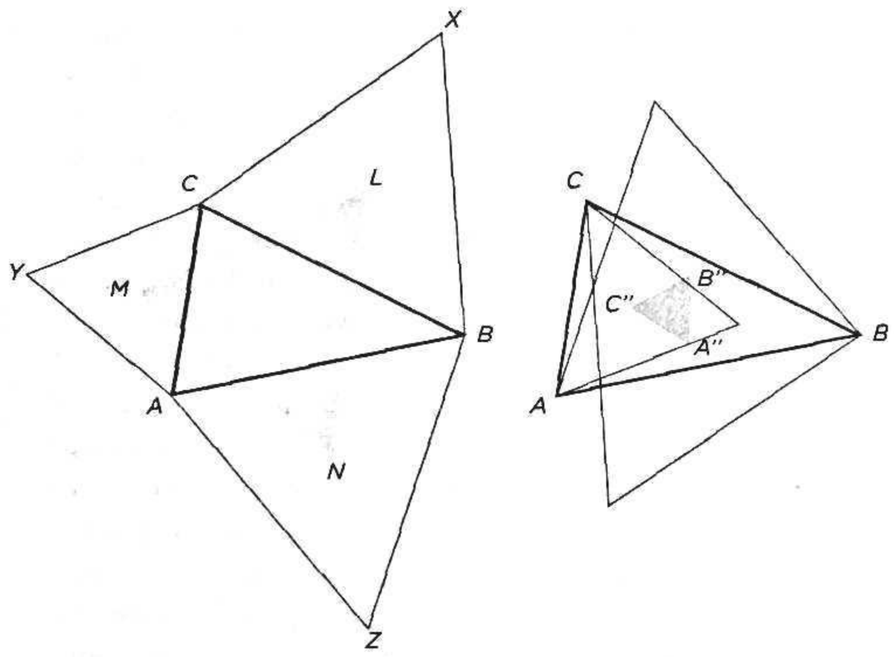
> Debemos mirar el estado presente del universo como el efecto de su estado anterior y como la causa del que seguirá. Una inteligencia que en un instante dado conociera todas las fuerzas que animan la naturaleza y la situación respectiva de los seres que la componen, si además fuera lo suficientemente vasta para someter todos esos datos a su análisis, resumiría en una misma fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del universo y los del más ligero átomo: nada sería incierto para ella y tanto el porvenir como el pasado serían presente a sus ojos.

Laplace no trataba de afirmar que una inteligencia superior podría calcular todos los efectos de las leyes de la naturaleza, sino que su objetivo era desarrollar la ciencia de las probabilidades para tener un conocimiento más exacto de esas leyes de la naturaleza.

La contribución de Laplace a la astronomía también fue de primer orden y se concretó en dos obras: la *Exposición del sistema del mundo* (1796) y el *Tratado de mecánica celeste*, libro monumental en cinco volúmenes publicados entre 1799 y 1825. En la primera se realiza una historia de la astronomía resumida y se demuestra que los movimientos planetarios son estables, siendo temporales las perturbaciones producidas por la influencia entre los planetas o por cuerpos externos. La segunda culmina el trabajo

EL TEOREMA DE NAPOLEÓN

Uno de los científicos amigos de Napoleón, en este caso menos conocido que Monge, Lagrange o Laplace, fue Lorenzo Mascheroni (1750-1800), quien enunció lo siguiente: «Dado un triángulo plano cualquiera, dibujamos triángulos equiláteros apoyados en cada uno de sus lados y representamos el baricentro —punto de corte de las medianas— de cada uno de esos triángulos. Entonces el triángulo que tiene como vértices a esos baricentros es un triángulo equilátero, sea cualquiera el triángulo inicial». Es el llamado «teorema de Napoléon», que se cumple tanto si los triángulos equiláteros que se dibujan sobre los lados del triángulo inicial son hacia dentro como si lo son hacia fuera. En las figuras puede verse el teorema de Napoleón sobre el triángulo *ABC*, con triángulos equiláteros (izquierda) e interiores (derecha). Y hay algo más que relaciona las áreas de los triángulos: el área del triángulo inicial es igual a la diferencia entre las áreas del triángulo equilátero que se forma con los exteriores y del triángulo equilátero que se forma con los interiores.



de más de un siglo en el que diferentes científicos trataron de dar una explicación matemática de la teoría de la gravitación universal que estuviera basada en los principios de Newton, sin otras referencias.

Es famosa la anécdota de que cuando Laplace estaba presentando *Exposición del sistema del mundo* a Napoleón, este le comentó displicente: «Monsieur Laplace, me cuentan que ha escrito usted este gran libro sobre el sistema del universo sin haber mencionado ni una sola vez a su creador». A esto respondió Laplace: «Sire, nunca he necesitado esa hipótesis». Es una muestra más de que la razón, por medio de las probabilidades, o la astronomía, eran suficientes para entender y explicar el mundo.

LA SOCIEDAD EN LA ÉPOCA DE GALOIS

La sociedad en la que nació y vivió Évariste Galois no era un mundo para jóvenes, a pesar de que la Revolución francesa y los cambios posteriores habían provocado una mayor movilidad social. Además, en ella, al contrario de lo que había pasado hasta entonces, algunos jóvenes habían tenido un protagonismo destacado: por ejemplo, Napoleón fue nombrado general a los treinta años; Robespierre y su colaborador Saint-Just, personajes clave de la época del Terror, fueron guillotinados con treinta y seis y veintisiete años, respectivamente. Pero pronto las cosas se ralentizaron. La preeminencia de los mayores y de los ancianos volvió a convertirse en la norma.

El mundo era mucho más pequeño que el actual, incluso para un joven culto e informado, como era el caso de Galois: se limitaba a Europa, en la que incluso Rusia era un territorio lejano y algo misterioso, y a un poco del resto de los continentes. Se conocía el norte de África, pero era todavía considerado un territorio exótico, ya que, aunque la campaña de Egipto había despertado el interés por todo lo de allí, en realidad seguía siendo un lugar desconocido. El resto del continente, excepto las costas, era *terra incognita*, un gran vacío en los mapas. América era un territorio colonizado, pero muy poco poblado, donde solo era independiente Estados Unidos, y no desde hacía mucho tiempo: la guerra de independencia contra Inglaterra había finalizado en 1783. Portugal y España se repartían los territorios de Centroamérica y Sudamérica, colonias que a lo largo de los años de vida de Galois se fueron independizando. Fue

el nacimiento de Venezuela (1811), Argentina (1816), Chile (1818), Colombia (1819), México y Perú (1821), Ecuador y Brasil (1822) y Bolivia (1825). Asia era todavía un continente lejano y misterioso compuesto por impenetrables imperios. Solo Inglaterra fue asentando durante estos años su dominio colonial en la India.

Era un mundo en el que se hacían muy pocos viajes, como consecuencia de la lentitud y la dificultad de los mismos. Por tierra, la forma habitual de transporte era la diligencia, tirada por caballos y por caminos en malas condiciones. Un viaje, por ejemplo, de París a Marsella costaba cuatro días completos. Solo en el ecuador de la vida de Galois, en la década de 1820, comenzaba a desarrollarse el ferrocarril en Francia: de hecho, la primera línea obtuvo su concesión en 1823. Un poco más fácil y menos costoso (aunque siempre caro) era el transporte por vía acuática (mar, ríos o canales), una circunstancia que hacía que la mayoría de las grandes ciudades crecieran junto a los puertos. Sin embargo, los viajes intercontinentales eran realmente peligrosos, largos e incómodos. Las noticias, por tanto, circulaban con lentitud, incluso las importantes: tardaban semanas dentro de un mismo país o continente, y meses, o incluso años, si tenían que viajar a América, África o Asia.

Estas precarias comunicaciones dificultaban las relaciones personales. Las personas cultas —el 85% de la población era campesina y el analfabetismo era la norma— se comunicaban por carta, y estas se mandaban mediante mensajeros personales. De hecho, no era raro que personas que no llegaban nunca a verse establecieran estrechas relaciones, como fue el caso de Gauss y la matemática francesa Sophie Germain (1776-1831).

El mundo en el que nació Galois estaba muy poco poblado y las personas tenían una esperanza de vida mucho más corta que en la actualidad, a causa, sobre todo, de la fácil propagación de enfermedades infecciosas, que circulaban a sus anchas por una sociedad en la que la falta de higiene y la alimentación deficiente eran las normas. La mortalidad infantil era muy elevada. Las cifras de población a comienzos del siglo XIX eran las siguientes: África contaba con 100 millones de habitantes; América, 31 millones; Asia, 600 millones; Oceanía, 2 millones y, por último, Europa, 200 millones de habitantes.

LAS MUJERES Y LAS MATEMÁTICAS

Hasta los inicios del siglo XIX, la historia de las matemáticas registra los nombres de muy pocas mujeres. A pesar de todo, de las trabas sociales, familiares e ideológicas, unas pocas destacaron, como fueron los casos de Hipatia de Alejandría (370-415), la francesa Émilie du Châtelet (1706-1749) o la italiana María Gaetana Agnesi (1718-1799). Sophie Germain (1776-1831), contemporánea de Galois, ejemplifica muy bien las dificultades de las mujeres para acceder al conocimiento matemático. Se la excluyó de los estudios académicos normales por ser mujer y fue autodidacta en matemáticas, escondiéndose hasta de su familia. Llegó a tener correspondencia con Lagrange y con Gauss, a quienes comenzó a escribir utilizando el nombre de un amigo. En 1816 recibió un premio de la Academia de Ciencias por su trabajo *Investigaciones sobre la teoría de las superficies elásticas*, que suponía su publicación y la autorización para asistir a las sesiones de la Academia, lo que hizo con asiduidad. Entre las matemáticas posteriores destacan Ada Lovelace (1815-1852), hija del poeta lord Byron, quien tuvo una importancia destacada en los primeros balbuceos de la informática, la rusa Sofía Kovalevskaya (1850-1891) y la alemana Emmy Noether (1882-1935), cuya importante contribución al desarrollo del álgebra se recuerda con un tipo de anillos llamados «noetherianos».

Busto de la matemática francesa Sophie Germain, contemporánea de Galois.

El analfabetismo estaba generalizado. Solo pequeñas capas de la población sabían leer y tenían acceso a la cultura. Las mujeres, también en las clases altas, estaban limitadas a la esfera doméstica y no contaban con posibilidades de estudiar ni de cultivarse; tampoco tenían capacidad de decisión y pasaban de depender del padre a hacerlo del marido. Las relaciones familiares eran muy rígidas y distantes. La Revolución introdujo el divorcio y, poco después, el código civil de Napoleón abolió el derecho del primogénito a heredar casi toda la herencia de los padres. La in-

fluencia de la Iglesia católica era muy importante en todos los aspectos de la vida, y sus dogmas, intocables e indiscutibles

Se vivía en unas casas frías, con poco espacio vital y menos comodidades. La mayoría no tenían agua corriente, y las que la tenían, las de los ricos, solo en la planta baja. El sistema de alcantarillado de las ciudades era rudimentario y básicamente se utilizaba para drenar el agua de la lluvia. Los desechos de las casas iban a fosos que después había que limpiar, y que se usaban como cotizados abonos agrícolas. Hay que recordar, aunque parezca obvio, que no había electricidad. La iluminación era muy deficiente y cara, y se utilizaban velas, o bien lámparas o candiles de aceite, como desde hacía miles de años.

Hacia finales del siglo XVIII Aimé Argand había inventado la lámpara de aceite, formada por dos cilindros y una mecha hueca y circular en contacto con el aceite, que generaba una llama mucho más brillante. Pero las guerras napoleónicas hicieron que fuera muy difícil el aprovisionamiento de los aceites más utilizados (el de ballena y el sebo ruso), por lo que se buscaron medios alternativos de iluminación. Surgió así el uso del gas, que en 1815 ya alumbraba bastantes calles de Londres, y que en 1829 comenzó a hacerlo en París. Para un estudiante como Galois, sin embargo, las velas suponían un gran porcentaje de sus gastos.

Las diferencias sociales eran enormes. Mientras a los nobles, y a los ricos en general, les servía un auténtico ejército de personas, la inmensa mayoría de los habitantes no tenía nada —ni siquiera comida—, iba mal vestida, pasaba hambre, no llegaba a tener las condiciones mínimas de higiene, vivía en ciudades y pueblos en habitáculos inmundos y estaba expuesta a todo tipo de arbitrariedades por parte de los poderosos. Los alimentos básicos eran escasos y, por tanto, caros, situación que era causa frecuente de revueltas populares. El sector económico más importante era el agrario, aunque se estaba gestando la Revolución industrial que cambiaría la economía, las relaciones sociales y las relaciones políticas de dominación. Inglaterra fue el primer país en que se legalizó un sindicato de obreros industriales (1824). La esclavitud se comenzaba a abolir, por lo menos en las declaraciones y las leyes. La trata de esclavos, entre África y las colonias americanas principalmente, se había afianzado en siglos anteriores, y el trabajo de los esclavos era la base de la economía en las plantaciones americanas. La Francia revolucionaria abolió formalmente la esclavitud mediante un decreto de 1794, pero Napoleón la restableció en 1802. En 1815, en el Congreso de Viena que repartió Europa tras la derrota de Napoleón, se condenó la trata de esclavos a impulso de los ingleses y, tres años más tarde, las grandes potencias europeas abolieron la esclavitud.

UNA FAMILIA REVOLUCIONARIA

Évariste Galois nació el 25 de octubre de 1811 en Bourg-la-Reine, un pueblo de los alrededores de París, a unos cuatro kilómetros de una de las antiguas entradas a la ciudad, la puerta de Orleans, en una casa que todavía está en pie en la actualidad ubicada en el número 20 de la Grand'Rue (actual avenida del general Leclerc). La gloria de Napoleón y de su Imperio estaban en su apogeo. Todavía no había comenzado la campaña rusa (iniciada en 1812), comienzo del declive del Imperio napoleónico, y Francia era el gran dominador del continente.

La doctrina oficial seguía siendo la de la Revolución francesa de 1789 de «Libertad, igualdad y fraternidad», pero la situación social se había estabilizado, con la aparición de nuevas estructuras de dominación, en las que buena parte de los nuevos nobles y altos dirigentes del Estado eran ahora antiguos revolucionarios, jefes militares o familiares de Napoleón, en sustitución de la antigua nobleza de sangre de la monarquía borbónica. Quedaba lejos la gran Revolución de 1789 que puso en cuestión tantas cosas, entre otras los nombres de las localidades: Bourg-la-Reine («el Pueblo de la Reina») pasó a ser entonces Bourg-Égalité («el Pueblo de la Igualdad»).

Los padres de Évariste eran Nicolas-Gabriel Galois (1775-1829) y su esposa Adelaide-Marie Demante (1788-1872). Desde mediados del siglo XVIII, la familia Galois era dueña de un colegio de enseñanza para jóvenes en la localidad, que conocía en esos

años una especial prosperidad: como consecuencia de la Revolución se había destruido la estructura educativa tradicional, que estaba en manos de la Iglesia, pero los nuevos centros laicos que debían cubrir las necesidades existentes no estaban creándose con la rapidez requerida.

Ese período pujante continuó en la época de Napoleón, hasta después del nacimiento de Galois. Tanto su padre como el hermano de este, Théodore-Michel, eran decididos partidarios de Napoleón. El tío de Galois, de hecho, llegó a ser oficial de la Guardia Imperial, cuerpo de élite del ejército napoleónico. Su padre, por el contrario, continuó en la dirección del colegio y era una persona amable y cortés que escribía poesía y teatro.

La madre de Galois era hija de un amigo y vecino del que sería su futuro marido, Thomas-François Demante, profesor de la Facultad de Derecho de la Sorbona y presidente del tribunal de la localidad normanda de Louviers. Adelaide-Marie había recibido una buena educación, basada en la cultura clásica, pero no en conocimientos científicos, algo no muy importante entonces para una mujer. Tenía un carácter fuerte y era bastante escéptica respecto a la religión institucional. Es decir, tanto la familia materna como la paterna estaban interesadas en la cultura y eran progresistas, pero no parece que en ninguna de las dos hubiera nadie con una especial predisposición o talento para las matemáticas.

El matrimonio de los padres de Galois se celebró en 1808, cuando el padre tenía treinta y tres años y la madre, veinte, una diferencia de edad muy común en la época. Al año siguiente de esa unión nació una niña, Nathalie-Théodore, y dos años después, en 1811, el primer hijo varón, cuyo nombre fue Évariste por el santo del día siguiente a su nacimiento, el 26 de octubre, fecha de su inscripción en el registro. El tercer y último de los hijos, Alfred, nació en 1814.

Al poco del nacimiento del pequeño Évariste se inició el declive del Imperio napoleónico. Después del desastre del gran ejército que invadió Rusia, Napoleón fue obligado a abdicar por las potencias europeas en abril de 1814 y se retiró a la isla mediterránea de Elba. Al mes siguiente, Francia volvía a tener un rey borbón, Luis XVIII, hermano del monarca guillotinado dos décadas antes.

Con él volvieron al poder los aristócratas de sangre retornados del exilio, así como la Iglesia católica, en un intento de dar marcha atrás en la historia y regresar a la situación anterior a la Revolución. Pronto el descontento social y, en consecuencia, el sentimiento revolucionario, comenzarían a extenderse. En todos los rincones de Francia se prendía la mecha del movimiento liberal, cuyo liderazgo en Bourg-la-Reine lo asumiría el padre de Galois.

El murmullo revolucionario llegó con rapidez a oídos de Napoleón, quien, en febrero de 1815, emprendió su vuelta a Francia, donde fue recibido con entusiasmo y retomó el poder. A pesar del apoyo de sus seguidores, el segundo período de mandato de Napoleón fue muy breve: solo duró cien días. Las potencias europeas aliadas le derrotaron en la batalla de Waterloo y le enviaron al definitivo exilio, esta vez a la remota isla de Santa Elena, donde murió en 1821. Luis XVIII volvió a París.

Mientras tanto, el padre de Galois fue nombrado alcalde de Bourg-la-Reine, un cargo que ocupó incluso después de la vuelta al poder del rey, a pesar de la declarada oposición de Nicolas-Gabriel Galois al monarca borbónico.

Durante su primera infancia, Évariste y sus hermanos no fueron a ningún centro de enseñanza y fueron educados personalmente por su madre. De hecho, a los diez años, aunque fue admitido en un colegio de la ciudad de Reims, Adelaide-Marie Demante decidió posponer el inicio de la escolarización reglada de Galois, ya que consideraba que este era demasiado frágil y enfermizo como para estudiar fuera de casa. No fue hasta 1823, cuando contaba doce años, cuando el pequeño Évariste inició una trayectoria académica que le llevó a descubrir y apasionarse por las matemáticas.

CAPÍTULO 3

La educación de un joven matemático

Galois descubrió las matemáticas cuando se hallaba estudiando en el prestigioso liceo de Louis-le-Grand, en París, de la mano del libro *Elementos de geometría* de Adrien-Marie Legendre, y profundizó en ellas gracias a los textos de los franceses Joseph-Louis de Lagrange y Augustin-Louis Cauchy, así como del alemán Carl Friedrich Gauss y del italiano Paolo Ruffini.

Évariste Galois comenzó sus estudios a los doce años en el liceo parisino de Louis-le-Grand, un prestigioso centro que había abierto sus puertas en 1563 y por el que habían pasado ya brillantes alumnos como Voltaire, Molière o Géricault, entre muchos otros. Fue el único colegio de París que permaneció abierto durante todo el período revolucionario y, a pesar de que los importantes cambios políticos habían influido de forma importante en la vida académica, seguía siendo el centro más reputado de toda Francia. Los liceos habían sido instituidos por la Ley Fourcroy de 1802 (también conocida como la Ley del 11 floreal del año x), una normativa de carácter conservador que significaba la vuelta a las instituciones del Antiguo Régimen. La Ley Fourcroy obligaba a los niños a ingresar en los liceos a los diez años de edad, momento en que comenzaban los estudios en la sexta clase y se continuaban en los cursos siguientes con una numeración correlativa descendente (quinta, cuarta, tercera, segunda, primera). Galois, que tenía doce años cuando ingresó en el liceo, fue admitido en la clase correspondiente a su edad, la cuarta, puesto que se incorporó dos cursos tarde a la enseñanza reglada.

A pesar del prestigio del Louis-le-Grand, las instalaciones eran de todo menos excelentes: las paredes se hallaban medio desconchadas, todas las ventanas tenían rejas y el régimen de vida era

similar a lo que para los ojos actuales podría ser un centro de rehabilitación o de castigo.

El día de los alumnos del liceo comenzaba, a toque de campana, a las cinco y media de la mañana. En los dormitorios había unas cuarenta camas, separadas entre ellas por un metro exacto, y sin ningún tipo de calefacción, incluso durante el crudo invierno parisino. Después de un rápido aseo, tenían que vestirse en silencio. Todos iban con el uniforme de la escuela, un diseño personal de Napoleón que, a pesar de los cambios políticos, seguía vigente. Una vez vestidos y después de rezar las oraciones comunitarias, los estudiantes se dirigían a las aulas a estudiar antes de desayunar —cosa que hacían en la propia aula— agua y pan, que había que comer en silencio y con celeridad, en menos de un cuarto de hora.

En las aulas no había bancos ni mesas, solo unas gradas en las que los estudiantes se sentaban, apoyando en sus rodillas los libros o cuadernos. Eran bastante oscuras porque la iluminación se limitaba a una vela para cada dos estudiantes, pero eran un poco menos glaciales que las habitaciones, ya que había grandes estufas de leña en cada una, aunque con frecuencia estas daban más humo que calor.

Las clases empezaban a las ocho, tras la llegada de los alumnos externos (aquellos que no dormían en el centro). El profesor se situaba en una especie de púlpito de madera, bastante por encima de los alumnos, desde el que podía vigilar con facilidad el comportamiento y la atención de los mismos. Por la mañana las clases se prolongaban hasta mediodía. Después los niños se dirigían al comedor para comer, de nuevo en silencio, aunque amenizados por la lectura de textos en voz alta que se consideraban apropiados para su formación. Era conveniente estar atentos a la lectura, porque podían ser objeto de alguna pregunta más tarde.

Después de las clases, tras muchas horas en reglamentario silencio, venía el único momento del día en que los colegiales podían hablar entre ellos y pasearse por el patio. A pesar de todo, tampoco era posible un gran bullicio ni una excesiva liberación de energía, porque se consideraba indecoroso, luego prohibido, correr cuando se tenían más de quince años. No se fomentaban, pues, el ejercicio físico ni el deporte.

A las dos comenzaba el horario lectivo de la tarde, que se prolongaba hasta las seis —con una merienda a las cuatro y media—, momento en que los externos regresaban a sus casas. Los internos, como era el caso de Galois, tenían todavía que cumplir con más obligaciones. Comenzaban por dirigirse a la capilla para asistir a los servicios religiosos. En ella los movimientos —arrodillarse, levantarse, sentarse, etcétera— estaban reglados y debían hacerse al unísono, con bastante de disciplina militar. Acabada la estancia en la Iglesia, a las siete y media se dirigían de nuevo al comedor, donde tomaban la cena. Y sin un posterior período de recreo, y siempre en silencio, incluso en las habitaciones, a las ocho y media debían estar en la cama.

Un régimen cuyo cumplimiento era tan difícil para los centenares de adolescentes y jóvenes que asistían al liceo (unos quinientos entonces), tan represor, tenía que llevar anejas sanciones rigurosas para los díscolos. Los infractores eran enviados a una de las doce celdas de castigo del centro, cada una de las cuales era una habitación minúscula, húmeda y sombría. El mobiliario estaba compuesto, tan solo, de un banco de madera y una jarra de agua. Aquí el castigado estaba aislado desde las diez y media de la mañana hasta las ocho de la tarde, sin siquiera una vela, incluso en invierno. La sanción mínima eran cuatro días. Como castigo añadido, el alumno debía realizar una complicada traducción del griego o del latín que tenía que hacer cada uno de los días de estancia en las celdas.

La lista de faltas que aparejaban un castigo era larga y variada, y comprendía desde hablar en uno de los (múltiples) momentos en que no estaba permitido, hacer demasiado ruido o simplemente moverse en la cama, las aulas o la capilla, comer demasiado o negarse a comer algo que no gustaba, y, en general, gastar cualquiera de las bromas tan habituales en todos los centros de enseñanza de todo el mundo en todas las épocas.

Las sombrías instalaciones del liceo Louis-le-Grand y las severas normas de vida imperantes en el centro no impedían la resistencia estudiantil y las revueltas de todo tipo, y más en un período en que se intentaba acabar con todas las conquistas sociales de la Revolución y del período de Napoleón. Todas las opiniones políticas estaban presentes en el alumnado y se pro-

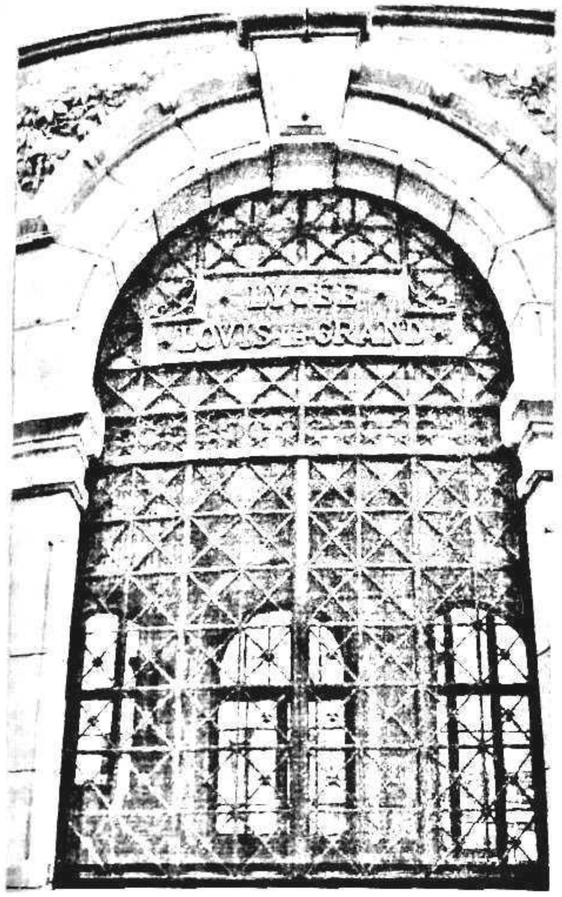
ducían grandes discusiones entre las diferentes tendencias en los patios en las horas de los recreos.

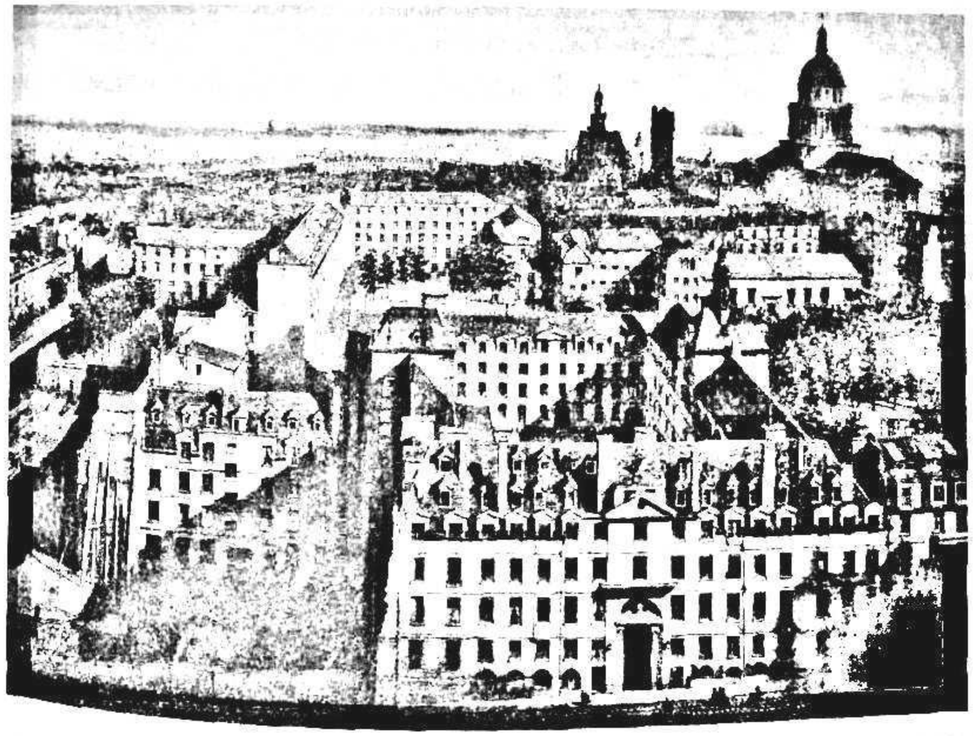
Cuando Évariste Galois ya estaba interno en el liceo, el 28 de enero de 1824 se celebró en todos los centros de Francia un banquete en honor de Carlomagno en el aniversario de su muerte. Los franceses consideraban al emperador de los carolingios como introductor de la escuela en Francia. A este banquete asistían los profesores y 75 alumnos elegidos entre los más destacados de cada uno de los cursos. Cuando, después de las lecturas y los discursos de rigor, llegó el momento en que el entonces recién nombrado director del Louis-le-Grand, Nicolas Berthot, hizo el tradicional brindis, ninguno de los estudiantes respondió. De hecho, todos permanecieron sentados y estallaron ruidosas carcajadas. Berthot, un profundo reaccionario de personalidad represora —de quien se rumoreaba que quería devolver la gestión del colegio a los jesuitas—, expulsó del centro de forma inmediata a esos 75 rebeldes. El liceo, por tanto, se quedó sin sus mejores alumnos.

«ORIGINAL Y EXTRAVAGANTE»

Aunque Galois entró en el liceo cuando sus compañeros de clase ya llevaban allí dos años (1823-1824), no tuvo problemas para seguir las enseñanzas del cuarto curso. La sólida formación grecolatina que había adquirido en casa fue uno de los motivos por los que, a final de su segundo año en el centro, ganara un premio y tres menciones honoríficas. Al inicio del curso siguiente participó en el *concours général*, una especie de Olimpiada anual entre los mejores alumnos de París. En ella obtuvo una mención honorífica por su traducción del griego. Asimismo, al final del curso 1825-1826, a pesar de haber tenido problemas de salud, con persistentes dolores de oído (debidos o agudizados por el frío y a la humedad del liceo), también obtuvo cuatro menciones honoríficas. Sin embargo, aparecieron los primeros síntomas de disgusto por el trabajo escolar.

En el verano de 1826 se produjo un cambio en la dirección del liceo. El cargo iba a ser ocupado por un antiguo profesor de teo-





FOTOS SUPERIOR IZQUIERDA E INFERIOR:
El liceo Louis-le-Grand, prestigioso centro fundado en 1563 por la Compañía de Jesús, está ubicado en el centro de París, junto a otros emblemáticos edificios, como el Collège de France, la histórica Universidad de la Sorbona o el Panteón.

FOTO SUPERIOR DERECHA:
Retrato de Évariste Galois a la edad de quince años, realizado por un artista anónimo.

logía, cuyo principal mérito era su postura política, fuertemente reaccionaria. En 1826-1827 Galois debía comenzar el curso de retórica; pero solo tenía quince años y, aunque sus notas eran muy buenas, a los ojos del nuevo director no eran suficientes para superar el escollo de la juventud. Por eso escribió a su padre una carta en la que le comunicaba que Évariste debía repetir el segundo curso, que sin embargo acababa de superar. Sus argumentos eran que «la inteligencia y el talento se pueden suplir con el estudio, pero no pueden sustituir el juicio que madura solo con la edad». El mismo director debía pensar que no eran razones muy poderosas, porque añadía que «no crea que sus nuevos rivales le harán fácil la victoria. Tendrá que formar parte de una de las mejores clases del instituto y sin ninguna duda su estudio tendrá que ser constante si quiere mantenerse entre los primeros».

Esta carta enfadó mucho al padre de Évariste, y se opuso a la decisión del director. Galois, por tanto, inició el curso con los estudios de retórica. Al final del primer trimestre, el profesor Desforgues, encargado de la clase, juzgaba que Galois era «celoso» en el estudio —es decir, cuidadoso e interesado— y su conducta era «buena». Eso sí, quizá con ánimo de apoyar las apreciaciones del director, añadía que «tiene la mente muy joven para poder sacar un buen provecho de la clase de retórica».

Pero cuando llegó enero la presión de la dirección venció a la familia y Galois retrocedió a la clase de segundo para repetir el curso. Esta humillación a causa de la arbitraria decisión de la dirección del liceo fue, sin embargo, la causa de una afortunada coincidencia gracias a la que Galois conocería las matemáticas. A partir de entonces, estas pasarían a ser la parte fundamental y casi única de sus ocupaciones intelectuales y tendrían una importancia decisiva.

En ese momento también empezó a manifestarse de forma clara su carácter rebelde. Debía de ser un adolescente «difícil» que no conocía los términos medios: amaba u odiaba. Sus notas del segundo trimestre del curso 1826-1827 lo atestiguan, ya que, mientras que los deberes religiosos, la conducta, el trabajo, la disposición y los progresos tenían juicios satisfactorios, su carácter era calificado de «original y extravagante». Las calificaciones, además, iban acompañadas de una crítica evaluación:

> Este alumno, que trabaja bien la totalidad de sus deberes, y algunos con ardor y gusto, se desanima con facilidad cuando la materia no le gusta, y entonces descuida el deber. Le pasa igual en las lecciones, que normalmente sabe bien, pero que a veces no aprende del todo. Nunca sabe mal una lección: o no la ha aprendido del todo o la sabe bien. En cuanto a sus cualidades personales son bien difíciles de definir. No es malo, pero es criticón, singular y hablador, le gusta llevar la contraria y hacer rabiar a sus compañeros.

EL DESCUBRIMIENTO DE LAS MATEMÁTICAS

Ni el profesor de matemáticas de Galois en el liceo durante los dos primeros cursos ni el libro de texto que seguía parecía que llamaran su atención. Pero, a su vuelta a la clase de segundo, el nuevo profesor era Jean-Hippolyte Vernier, que no era muy bueno pero utilizaba un libro de texto excelente, lo que despertó el interés de Évariste hacia la materia. Se trataba de *Éléments de géométrie* (*Elementos de geometría*) de Adrien-Marie Legendre (1752-1833), publicado en 1794, pero que en sucesivas ediciones francesas, así como en sus traducciones a diversos idiomas, fue un texto utilizado a lo largo del siglo XIX en toda Europa.

Fue entonces cuando se revelaron las extraordinarias facultades matemáticas de Galois. Según el testimonio de sus condiscípulos, el joven lo leyó de principio a fin en solo dos días, con una avidez y una fascinación con la que cualquier otro hubiera leído la mejor novela. Parecía como si no le costara esfuerzo. Gracias al libro descubrió un mundo intelectual que le permitía evadirse de la realidad que le rodeaba en el colegio, incómoda y con reglas injustas. Con las matemáticas se adentraba en un maravilloso mundo dotado de la coherencia que le faltaba a su entorno y, además, de una enorme simplicidad, siempre que se supiera navegar por él. Las matemáticas se convirtieron en su único interés escolar y en uno de los pilares fundamentales de su vida. Debido a esto, Galois se desentendió del resto de las asignaturas, su comportamiento en el liceo empeoró y se aisló de sus compañeros. Solo el

LOS *ELEMENTOS DE GEOMETRÍA* DE LEGENDRE

El libro que descubrió las matemáticas a Évariste Galois era un gran libro de texto que añadía toda una serie de notas a pie de página o de forma separada en las que se exponían algunos de los últimos resultados matemáticos o se proponían problemas no inmediatos. El mismo Legendre indicaba dos niveles de utilización: por un lado, la lectura del texto, sin más, obviando notas, apéndices y todo lo escrito en letra pequeña, para poder volver más adelante o por indicación del profesor a esas partes más complicadas o más recientes. En cada nueva edición Legendre iba añadiendo las novedades. Por ejemplo, en la de 1802, en una nota al pie, daba cuenta de un resultado publicado el año anterior: la demostración de que se podía inscribir en una circunferencia un polígono de 17 lados con la ayuda de la regla y el compás. En otra de las notas reprodujo la primera demostración —que Lambert publicó en 1761, cuya autoría señala— de la irracionalidad del número π y añadió lo siguiente: «Es probable que el número π no esté ni siquiera incluido en los irracionales algebraicos, es decir, que no pueda ser la raíz de una ecuación algebraica con un número finito de términos con coeficientes racionales. Pero parece muy difícil demostrar esta proposición». Y no se equivocaba Legendre, porque su conjetura era cierta: π es un número trascendente, pero hubo que esperar hasta 1882, décadas después de la muerte de Legendre, para que dicha conjetura fuera fue demostrada por el matemático alemán Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1939). Sin duda, un libro de este tipo era ideal para una persona como Galois, apasionado por las matemáticas, porque le proponía retos aunque, como era su caso, no tuviera a su lado ningún profesor que le estimulara.

La figura de Legendre

Además de su labor pedagógica, Legendre destacó por su desarrollo del análisis, en particular de los desarrollos en serie, y por participar de forma destacada en las instituciones científicas de su época. Desde 1795 fue miembro de la Agencia Temporal de Pesos y Medidas, que puso en marcha el sistema métrico decimal, y de la Sección de Matemáticas del Instituto Nacional de Ciencias y Artes, que sustituyó a la Academia de Ciencias. Fue profesor encargado del examen de graduación de la Escuela Politécnica desde 1799 y miembro de la Oficina de Medidas desde 1812, entre otros importantes cargos.

profesor Vernier tenía comentarios positivos hacia él: «Estudia asiduamente y con provecho». Pero incluso este, defensor de la enseñanza ortodoxa, y que se limitaba a seguir de forma mecánica el libro de Legendre, achacaba a Galois el hecho de no ceñirse al método habitual. No supo ver que no era un alumno normal. De hecho, esa falta de método a la larga le hizo tener problemas con todos los matemáticos oficiales con los que se relacionó después. Y el desprecio por el resto de las asignaturas le supuso no pocas dificultades en el centro, lo que sin duda contribuyó a fomentar su rebeldía política y social.

«Todas las verdades de las matemáticas
están vinculadas entre sí.»

— ADRIEN-MARIE LEGENDRE.

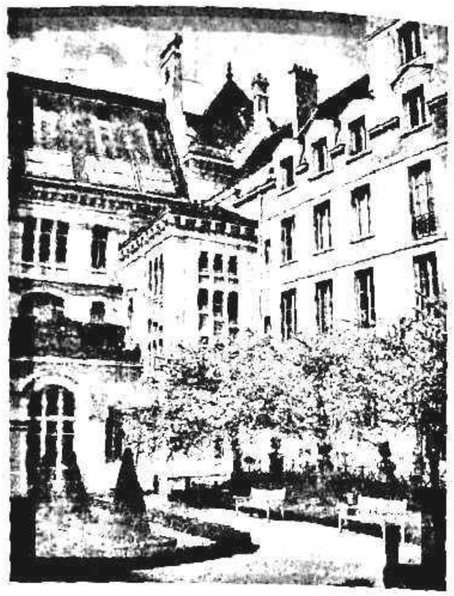
Galois se dedicó en solitario, sin la ayuda de su profesor, a buscar demostraciones diferentes de las que había en el libro de Legendre, y así tratar de resolver los problemas propuestos en el mismo o los que le iban surgiendo con el estudio. Pronto el joven se dio cuenta de que su capacidad matemática era muy superior a lo normal y buscó ampliar su horizonte. Según el testimonio de otro compañero suyo, a Galois nunca le gustaron los libros elementales de álgebra porque no era palpable el trabajo de los investigadores. Esa fue la causa por la que quiso estudiar los textos originales de los grandes matemáticos de la época, entre los que estaban las memorias de Lagrange. Gracias a ellos, Galois se introdujo en la teoría de ecuaciones, en la que trabajó e hizo contribuciones decisivas durante los años siguientes.

Como señalaba su profesor, Galois estudiaba sin el método habitual: repetición de ejercicios y aprendizaje en el orden prefijado por un libro de texto. Y así lo indicaba en sus notas. Esa falta de método fue un lastre para el buen desempeño en los exámenes, pero a la vez permitió a Évariste abordar sin prejuicios algunos problemas, en cuya resolución se apartó de la ortodoxia.

LA PERSONALIDAD DE GALOIS

Las calificaciones de Galois en el liceo Louis-le-Grand durante el segundo trimestre del curso 1826-1827 son un reflejo de su rebelde personalidad y difícil encaje en el conservador centro:

— Nota de estudio: conducta muy mala, carácter poco abierto. Ambiciona la originalidad. Sus aptitudes son relevantes, pero no quiere utilizarlas en la retórica. No hace absolutamente nada por la clase. Le domina el furor por las matemáticas; pienso que sería mejor para él que sus padres permitieran que no se ocupara más que de ese estudio; pierde su tiempo aquí y no hace más que atormentar a sus profesores y hacerse abrumar de castigos. No se muestra desprovisto de sentimientos religiosos, su salud parece frágil.



Aspecto del patio del liceo Louis-le-Grand en la actualidad.

— Retórica. Nota del profesor M. Pierrot: trabaja algunos deberes. Aparte de eso, hablar como siempre.

— Nota del profesor M. Desforgues: disipado, hablador. Pienso que pone empeño en cansarme, y sería muy mal ejemplo si tuviera alguna influencia sobre sus compañeros.

— Matemáticas preparatorias. Nota del profesor M. Vernier: inteligencia, progresos sobresalientes. Insuficiencia de método.

Galois se dedicó de forma intensiva a las matemáticas, con una gran confianza en sus capacidades y dejando a un lado a profesores y compañeros. Uno de sus profesores afirmó: «Le domina el furor por las matemáticas; pienso que sería mejor para él que sus padres permitieran que no se ocupara más que de ese estudio; pierde su tiempo aquí y no hace más que atormentar a sus profesores y hacerse abrumar de castigos.».

Pero las notas y las descalificaciones de todo el profesorado no le iban a hacer desistir de su interés por las matemáticas. Buscó entonces una salida pedagógica en la que las matemáticas fueran importantes y por ello decidió intentar su ingreso en la Escuela Politécnica, que era el centro de enseñanza científica francés más importante del país.

EL INTENTO DE ACCESO A LA POLITÉCNICA

Con un alto concepto de sí mismo, sin creer necesario hacer ningún curso de preparación —e incluso sin decir nada a su familia— y a pesar de tener un año menos de lo que era habitual entre los aspirantes, Évariste Galois se presentó a los exámenes de ingreso en la Escuela Politécnica en junio de 1828. El esperado suspenso fue una desilusión para el aspirante, pero, a la vez, sirvió para motivarlo a prepararse mejor, y por eso volvió al liceo dispuesto a cursar unas matemáticas más profundas para poder presentarse con más posibilidades de éxito al año siguiente. Por eso se matriculó en la asignatura «Matemáticas especiales», impartida por el profesor Louis Richard.

Richard era un profesional entusiasta que estaba atento a las nuevas tendencias e investigaciones, y tenía un cariño especial a las matemáticas que, además, sabía transmitir a sus alumnos. Detectó rápidamente la habilidad de Galois para alegría de este, que por fin encontraba a alguien con quien compartir su entusiasmo y pasión por la materia. Las relaciones matemáticas entre Richard y Galois fueron muy fructíferas para el desarrollo del joven, quien ideaba soluciones originales a los problemas que planteaba el profesor a toda la clase. Este se percató pronto del valor de las aportaciones de Galois y guardó durante toda su vida los manuscritos del joven, dejándoselos a su muerte a otro gran matemático, Charles Hermite (1822-1901). Hoy se conservan en la Biblioteca del Instituto de Francia.

Puede observarse el aprecio que Richard tenía a Galois en sus anotaciones durante el curso: «Este alumno tiene una destacada superioridad sobre todos sus compañeros», y también «este alumno no trabaja más que las partes superiores de las matemáticas». Esas afirmaciones contrastaban con el parecer general del liceo, expresado en la siguiente nota de estudio:

LA ESCUELA POLITÉCNICA

Dedicada a la enseñanza de la ingeniería y dependiente del Ministerio de Defensa, la Escuela Politécnica fue creada en 1794 como una escuela preparatoria común a todas las especialidades de la ingeniería civil y militar. Fue uno de los resultados del proceso de creación de organismos de formación para los futuros cuadros del Estado, puesto en marcha una vez transcurrido el período «agudo» de la Revolución. La comisión que diseñó la estructura de la Escuela Politécnica estuvo presidida por el matemático Gaspard Monge, que fue su primer director y reclutó a científicos de primera fila, entre los que se hallaban Joseph-Louis de Lagrange, Pierre-Simon de Laplace, Adrien-Marie Legendre y Sylvestre-François Lacroix. Sus planes de estudio combinaban aportaciones teóricas con aplicaciones prácticas, y las matemáticas eran una materia fundamental. Pronto se convirtió en el centro de enseñanza técnica más importante de Francia y de toda Europa, y su organización se erigió en un modelo aplicado en otros países. Cuando Évariste Galois era estudiante tenía una merecida fama, y todos los alumnos aventajados intentaban entrar en ella, para lo que había que superar unas difíciles pruebas de acceso. Estas se preparaban de forma específica y los aspirantes tenían que invertir al menos un año en una preparación matemática especial. El ambiente político de los estudiantes de la Politécnica solía ser progresista, y muchos estuvieron en primera línea en las diferentes revueltas que se sucedieron en París en las primeras décadas del siglo XIX.

> Se comporta generalmente bien; sin embargo, a veces su conducta es reprensible. Trabaja mucho y está dotado de grandes aptitudes y de una facilidad sorprendente. Sus progresos responden a su trabajo y a su facilidad. Tiene un carácter extravagante, es a veces poco serio pero a menudo también parece razonable. Se porta bastante bien durante los servicios religiosos. Su salud es buena.

Y todavía peor era lo que expresaba el profesor de física y química, Jean-Baptiste-Antoine Thillaye: «Conducta pasable, trabajo nulo». Thillaye era un profesor que solía mantener una estrecha relación con sus alumnos y Galois no le hacía ningún caso, ni a él ni a sus asignaturas, justamente al contrario de lo que le pasaba con las matemáticas y el profesor Richard.

Los temas que ocupaban a Richard y Galois eran los principales asuntos de investigación de la época, los mismos que preocupaban a los matemáticos más brillantes del momento. La prueba de que estaban en la buena línea de investigación la aporta un hecho concreto: la prestigiosa revista *Annales de Mathématiques*, dedicada a la publicación de investigaciones originales de matemáticos profesionales de reconocido prestigio, publicó en el número del 1 de marzo de 1829 un artículo de Galois, con el siguiente título: «Demonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques» («Demostración de un teorema relativo a fracciones continuas periódicas»). Galois no había cumplido todavía los dieciocho años, algo bien poco frecuente en un autor. No cabe duda de que el artículo tenía calidad, pero estaba en la línea de las ideas de Legendre y en él no aparecen todavía las grandes ideas imaginativas que más adelante generará el joven matemático.

Para Galois fue todo un orgullo la publicación de este artículo, pero también para Richard, quien confirmaba que tenía como alumno a alguien con un brillante porvenir matemático, puesto que una revista seria —con lo que conlleva de revisión previa de los originales antes de su publicación— había aceptado un artículo suyo. De esa relación entre profesor y alumno se podían esperar cosas importantes.

LAS LECTURAS (O LAS FUENTES) MATEMÁTICAS DE GALOIS

La historia de las matemáticas muestra que de vez en cuando aparecen ideas brillantes que suponen avances súbitos en problemas cuya resolución ha permanecido encallada durante mucho tiempo. En bastantes casos, además, estas ideas geniales han significado la apertura de nuevas vías que no solo han resuelto los problemas, sino que también han abierto nuevos campos de desarrollo de las matemáticas, abordando nuevos desafíos. Pero son raros —por no decir inexistentes— los casos en que esas aportaciones han surgi-

do sin un sustrato matemático basado en las ideas de los cultivadores anteriores de ese problema. Es decir, antes de poder aportar nuevos puntos de vista, de ampliar el horizonte, de dar una nueva perspectiva, conviene conocer a aquellos que han pasado antes por allí. Hay que estar, como afirmaba Isaac Newton, «subidos a hombros de gigantes».

«Las matemáticas parecen constituir una facultad de la mente humana destinada a compensar la brevedad de la vida y la imperfección de los sentidos.»

— JEAN-BAPTISTE JOSEPH FOURIER.

Un gran avance fue el que supuso la solución que Galois dio al viejo problema de qué ecuaciones son resolubles por radicales. Fue una contribución realizada, además, en una temprana edad —puesto que murió antes de cumplir los veintiún años—, circunstancia que da más valor a su tarea y a su visión, porque no tuvo demasiado tiempo para reposar y concretar sus ideas. Estas no salieron de un desierto matemático, sino que estaban desarrolladas a partir de la lectura de textos matemáticos de sus coetáneos. Por eso es interesante conocer cuáles fueron esas lecturas y cuáles de entre ellas le interesaron especialmente.

Uno de los autores preferidos de Galois fue Joseph-Louis de Lagrange. Y otro, Augustin-Louis Cauchy; este, curiosamente, ya que tuvo un papel destacado —y funesto— en la falta de reconocimiento en vida de la obra de Galois. También influyeron en su obra dos matemáticos que hicieron de puente entre Lagrange y Cauchy: en concreto, el italiano Paolo Ruffini y el alemán Carl Friedrich Gauss.

LAGRANGE Y LAS ECUACIONES DE QUINTO GRADO

Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813), en un intento de encontrar vías para avanzar en la resolución de las ecuaciones de grado superior a cuatro, retomó el tema en 1770 en su artículo «Réflexions sur la résolution algébrique des équations» («Reflexiones sobre la resolución algebraica de las ecuaciones»), publicado en la revista de la Academia de Ciencias de Berlín:

> Este examen tendrá una doble ventaja; por una parte servirá a proporcionar mayor claridad sobre las conocidas resoluciones de tercero y cuarto grado. Se conocían desde hace mucho tiempo las fórmulas de resolución; por otra será útil a los que quieran ocuparse de la resolución de grados superiores, proporcionándoles diferentes puntos de vista para ello, ahorrándoles, sobre todo, un gran número de tentativas inútiles.

La vía de ataque de Lagrange al problema de la resolución de las ecuaciones de grado superior a cuatro es la siguiente: en vez de buscar directamente las n raíces que existen de una ecuación de grado n, su objetivo era obtener ecuaciones auxiliares, que llama «resolventes», construidas a partir de las soluciones de la ecuación. Cualquier cambio en el orden de esas raíces, es decir, cualquier permutación de estas, realizada en una función de esas raíces, cambia su valor. Sin embargo, existen algunas de esas funciones que presentan simetrías en las que algunas permutaciones de las soluciones no cambian su valor: son, por tanto, funciones con pocos valores con las que se pueden construir ecuaciones auxiliares fáciles de resolver, y, a partir de su resolución, encontrar las raíces de la ecuación original. Esas resolventes de las ecuaciones de tercer y cuarto grado son de un grado menor, lo que conduce a una ecuación de segundo grado, fácilmente resoluble por radicales.

Lagrange muestra con este procedimiento la forma en que se pueden llegar a obtener las soluciones de las ecuaciones generales de tercer y cuarto grado, sin tentativas del tipo de las que hicieron los algebristas del Renacimiento italiano.

El razonamiento general de Lagrange era de este tipo: a cada ecuación general de grado n $(x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0)$ de raíces $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se le puede asociar una función racional $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que, con las permutaciones de las n raíces, tendrá como máximo

tantos valores como número de permutaciones: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$ Esos valores distintos son las soluciones de la resolvente de Lagrange: $(y\text{-}f_1)(y\text{-}f_2)\ldots(y\text{-}f_{n!}) = 0$.

Las raíces de la ecuación original son funciones racionales de las de la resolvente. El grado de esta resolvente es como máximo $n!$, es decir, 6 en el caso de la cúbica, y 24 en la ecuación de cuarto grado. Si se encuentran funciones que por permutaciones tomen un número de valores menor de $n!$, se reduce hasta ese número el grado de la resolvente. Lagrange demostró un teorema según el cual ese grado tiene que ser un divisor de $n!$.

En el caso de la cúbica, el divisor de $3! = 6$ que se utiliza es 2 (siendo al resolvente de segundo grado); en el de la cuártica es 3 (que divide a $3! = 24$), como ya se había visto. Pero, al pretender continuar con grados mayores, empezando por la de quinto grado (en que la resolvente tenía que ser un divisor de $5! = 120$), Lagrange no logró rebajarlo de 6, cosa que no facilitaba el problema, sino que lo complicaba. Y lo mismo pasaba con otros: no obtuvo ningún resultado. Como reconoció años más tarde en su *Tratado de la resolución de las ecuaciones numéricas de todos los grados*:

> Todas las tentativas que he hecho para llevar más lejos la resolución de ecuaciones no han desembocado más que en encontrar nuevos métodos para el tercero y cuarto grado, sin que haya podido afectar los grados superiores, salvo para clases particulares de ecuaciones.

Este fracaso en la búsqueda de soluciones de las ecuaciones generales de grado cinco o mayor, después de los esfuerzos realizados por tantos matemáticos, sembró la duda acerca de su existencia.

LAS PERMUTACIONES

Lagrange utilizó en sus deducciones la herramienta de las permutaciones. Ya los matemáticos hindúes se habían maravillado de la magnitud gigantesca de las posibilidades diferentes de reordenar una pequeña cantidad de objetos: permutar consiste en reordenar una serie de objetos, y permutaciones son las distintas formas de ordenar los n elementos de un conjunto. El número de permutaciones de n objetos, que se representa por P_n, es el número de formas distintas en que pueden ordenarse.

JOSEPH-LOUIS DE LAGRANGE

Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813), aunque de origen francés, nació en Turín (Italia), en cuya universidad estudió. Fue nombrado profesor de geometría en la Academia Militar de su ciudad natal a los diecinueve años, donde se convirtió en profesor de los futuros oficiales del reino de Saboya, la mayoría de los cuales eran mayores que él. En 1758 fundó una sociedad que acabaría siendo la Academia de Ciencias de Turín, y en 1766 fue nombrado director de la Academia de Ciencias de Berlín, a propuesta del anterior director, Leonhard Euler, puesto que desempeñó durante veinte años, hasta su traslado a la capital francesa. Durante el período posterior a la Revolución francesa trabajó en la comisión para el establecimiento de un nuevo sistema de pesos y medidas. Después de la Revolución, fue profesor de la nueva Escuela Normal (en 1795) y más tarde de la Escuela Politécnica (1797), donde explicó y editó su teoría de las funciones analíticas. Tres de sus obras, *Resolución de ecuaciones numéricas*, *Teoría de las funciones analíticas* y *Lecciones sobre el cálculo de funciones* fueron las que en el curso 1827-1828 proporcionaron a Galois los conocimientos algebraicos a partir de los cuales desarrolló sus teorías. A su muerte, en 1813, fue enterrado en el Panteón de los Hombres Ilustres de París. El encargado de hacer su elogio fúnebre fue otro de los grandes matemáticos de la época, Pierre-Simon de Laplace, quien destacó que «entre aquellos que de modo más activo han extendido las fronteras de nuestra ciencia, Newton y Lagrange poseían en su grado más elevado ese venturoso arte de descubrir los principios universales, aquellos que constituyen la verdadera esencia de la ciencia. Este arte, unido a una singular elegancia en el desarrollo de las teorías abstractas, es característico de Lagrange».

Para discernir cuál es ese número se procede de la siguiente forma: se puede elegir el primer elemento entre los n disponibles; para el segundo se tienen $n-1$ posibilidades; para el tercero, $n-2$, y así sucesivamente. En definitiva, el número de permutaciones de n elementos distintos será

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Al producto se le denomina «factorial de n» y se representa como $n!$:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_n.$$

Al ir aumentando n, el valor de $n!$ crece de una manera mucho más rápida de lo esperable. Con la calculadora se puede comprobar. Si $5! = 120$ y $10! = 3\,628\,800$, son cantidades asequibles, ya $20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$ (aproximadamente $2{,}4 \times 10^{18}$), tiene 19 cifras y $50!$ (aproximadamente $3{,}04 \times 10^{64}$) tiene nada menos que 65 cifras. Para facilitar el cálculo, a pesar de no tener sentido, por definición se toma $0! = 1$.

Para formar todas las permutaciones se utiliza la misma estrategia que para calcular el número: se toma el primer elemento y se analizan las distintas posibilidades que se tienen para el segundo. Para cada una de ellas se consideran todas las posibilidades de elegir el tercer elemento, y así sucesivamente. Las permutaciones posibles con 1, 2, 3 y 4 (todos los números diferentes de cuatro cifras distintas que se pueden formar con ellos) serían:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

La situación se complica cuando algunos de los elementos son iguales, por ejemplo, conocer las formas diferentes de ordenar las letras de la palabra AMAPOLA, que tiene 7 letras, pero con la A repetida 3 veces. El número no es $P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$, porque al cambiar entre sí las A, se obtiene la misma permutación. Manteniendo fijas las letras M, P, O y L, podemos hacer 6 ordenaciones diferentes con las 3 letras A ($P_3 = 3! = 6$). Esto ocurre para cualquier forma de ubicar las letras M, P, O y L, luego el número total de palabras será:

$$N = \frac{P_7}{P_3} = \frac{5\,040}{6} = 840.$$

Con permutaciones con repetición, si tenemos una colección de n objetos, de los cuales hay a ejemplares del objeto A, b ejemplares del B, ..., z ejemplares del Z ($a + b + \ldots + z = n$), el número total de permutaciones con repetición que se pueden formar es

$$\frac{n!}{a! \cdot b! \cdot \ldots \cdot z!}.$$

GAUSS Y LAS ECUACIONES CICLOTÓMICAS

La influencia de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), uno de los grandes matemáticos de la historia y clave para la evolución del álgebra —hasta el punto de ser conocido como «príncipe de los matemáticos»—, también fue patente en la experiencia de Galois. Ya en su tesis de 1799 demostró de forma rigurosa el teorema fundamental del álgebra, enunciado por D'Alembert, como ya se ha visto anteriormente. En su forma más general dice: «Todo polinomio no constante con coeficientes complejos de grado n tiene n raíces».

Gauss expresó sus dudas sobre la posibilidad de hallar una solución general de las ecuaciones algebraicas de grado mayor que 4, pero, en el proceso, estudió y resolvió muchos tipos de ecua-

ciones. En particular, probó que las ecuaciones del tipo $x^n-1=0$ son resolubles para cualquier número natural n. Como

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1).$$

Las soluciones de $x^n-1=0$ son 1 y las raíces de

$$(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1),$$

que es la llamada ecuación ciclotómica, llamada así porque tienen relación con la división de la circunferencia en n partes iguales, se relacionan con uno de los problemas clásicos de las matemáticas: la construcción de polígonos regulares con regla y compás.

«Los encantos de esta ciencia sublime, las matemáticas, solo se revelan a aquellos que tienen el valor de profundizar en ella.»

— Carl Friedrich Gauss.

Gauss estudió con detenimiento las condiciones en las que $x^n-1=0$ es resoluble algebraicamente, lo que lleva a que lo sea la ecuación ciclotómica. Demostró que lo era para diferentes valores de n, el primero de los cuales fue $n=17$, lo que implica que el polígono regular de 17 lados se puede inscribir en una circunferencia mediante la regla y el compás. Esta demostración la anotó en su diario el 30 de marzo de 1796, y fue la que le inclinó de forma definitiva a dedicarse a las matemáticas, ya que hasta ese momento dudaba entre ellas o las lenguas clásicas. Más adelante probó los mismos resultados para $n=257$ y, más en general, para todos los números $n=2^{2^p}+1$ que sean primos (en esa expresión los casos 17 y 257 corresponden a $p=2$ y $p=3$).

Lo que liga a Gauss con el avance hacia los resultados de Galois es el hecho de que las soluciones de la ecuación ciclotómica forman un grupo cíclico (todos los elementos son potencias de uno de ellos). Y aunque no llegó a hacer un estudio completo de esas soluciones sí que dio esbozos de la misma.

CARL FRIEDRICH GAUSS

Aun siendo las matemáticas un territorio que no solo cuenta con un gran número de genios precoces, sino que además es reconocido socialmente como tal, quizá Carl Friedrich Gauss (1777-1855) es el caso más conocido de talento precoz, tanto que él mismo solía decir que había aprendido a contar antes que a hablar. De hecho, antes de cumplir tres años, miraba con atención unas operaciones que estaba haciendo su padre para obtener el sueldo semanal de unos trabajadores a su cargo; al acabar, el pequeño Carl Friedrich le dijo a su padre que la cuenta estaba mal hecha y, cuando este la repasó, constató con gran sorpresa que el resultado correcto era el que decía su hijo. Un poco más mayor, con nueve años, su maestro propuso en clase sumar todos los números desde 1 hasta 100, con la seguridad de que los niños estarían un buen rato con las operaciones y le dejarían tranquilo. Sin embargo, a los pocos segundos, Gauss dijo *Ligget se!* («¡Ahí está!»): había escrito en la pizarra el resultado correcto, 5 050, al que había llegado con un sencillo procedimiento (que, en realidad, era la fórmula de la suma de los términos de una progresión aritmética): se había dado cuenta de que la primera cifra (1) y la última (100) sumaban 101, y que lo mismo sucedía con la segunda (2) y la penúltima (99), con la tercera (3) y la antepenúltima (98) y así sucesivamente. Lo único que hizo, pues, fue multiplicar 50·101.

Una vida repleta de logros

La fama de genio de Gauss se extendió rápidamente y con catorce años fue presentado al que se convertiría en su protector, el duque de Brunswick (su ciudad de nacimiento), quien era conocedor de esa fama. A los dieciocho años, demostró la posibilidad de inscribir un polígono regular de 17 lados en una circunferencia utilizando solo la regla y el compás. La generalización de ese caso particular, dando la característica que debía cumplir n para que un polígono regular de n lados pudiera construirse con regla y compás, resolvía un problema pendiente desde hacía casi veinte siglos. Gauss continuó toda su vida realizando aportaciones fundamentales en geometría, estadística, astronomía y física y desde 1807 lo hizo desde una cátedra en la Universidad de Gotinga, ciudad en la que murió en 1855.

RUFFINI Y SU REGLA

Aunque en general no se reconozca la importancia de Paolo Ruffini (1765-1822), a casi todos los estudiantes les suena su nombre porque en los tratados de matemáticas de secundaria aparece la llamada «regla de Ruffini», utilizada para obtener el cociente y el resto de la división de un polinomio $P(x)$ por el binomio $(x-a)$.

Ruffini avanzó un paso más, pues estaba convencido de que si todos los intentos anteriores —incluido el de Lagrange— de encontrar una fórmula por radicales para la resolución de la ecuación general de quinto grado o mayor habían fracasado, esto debía tomarse como prueba empírica razonable de que no existía, y que, por consiguiente, la tarea era demostrar esa imposibilidad, aunque no fuera esa la opinión generalizada: seguía intentándose encontrar la fórmula que iba a garantizar la fama a aquel que la consiguiera.

Para demostrar la imposibilidad de la resolución de la ecuación de quinto grado, Ruffini tomó de Lagrange las ideas sobre la reordenación de las soluciones de una ecuación y profundizó en el camino de la abstracción. Para ello se ocupó no tanto de las reordenaciones de Lagrange, sino de las transformaciones que llevaban de una a otra de esas ordenaciones, a las que llamó *permutazioni*. Esto le condujo al estudio de un conjunto cuyos elementos eran las *permutazioni*, en el que combinando de forma sucesiva dos de estas se logra otra nueva *permutazione*. La peculiaridad estriba en que no se obtiene siempre la misma si se varía el orden en que se haga la composición, al contrario de lo que sucede con la mayoría de las operaciones, como la suma o la multiplicación de números, en las que el orden de los elementos no altera el resultado: cumplen la propiedad conmutativa. Y sobre el estudio del álgebra de las permutaciones intentó Ruffini demostrar la imposibilidad de la resolución de la ecuación de quinto grado.

Con las cinco soluciones de la ecuación de quinto grado se obtienen 120 ($5! = 120$) posibilidades de ordenamiento, de las que solo una parte serán válidas. Ruffini, partiendo de esta estructura, intentó demostrar la imposibilidad de la resolución de la ecuación de quinto grado desde la imposibilidad de la estructura. Una vez consideró que tenía la demostración, se la envió a Lagrange, ya

PAOLO RUFFINI

Paolo Ruffini (1765-1822) nació en Valentano (Italia) y era hijo de médico. Estudió, entre otras materias, matemáticas y medicina en la Universidad de Módena. Las grandes transformaciones políticas de su época le afectaron de forma directa, porque al negarse a prestar juramento de adhesión a la República Cisalpina —creada en 1797 por Napoleón y cedida, como reino, a Austria en 1815— le fue prohibido enseñar, por lo que se dedicó a la medicina como profesión y, como afición, a sus intentos de demostrar la imposibilidad de la resolución de la ecuación de quinto grado. Volvió a la docencia después de la caída de Napoleón, en 1814. Murió como consecuencia de un tifus adquirido en la epidemia de 1817.

anciano entonces, quien no le contestó. Siguió refinando la demostración, y de nuevo se la envió a Lagrange, quien continuó sin contestar, a la vez que le llegaban noticias de rumores sobre los errores en su demostración. Eso le llevó a abandonar las matemáticas y dedicarse a su otra profesión: la medicina. Poco antes de morir se enteró de que alguien poco dado a cumplidos como Augustin-Louis Cauchy sí que había aceptado como válida su demostración y le había dedicado sus alabanzas. Lo sorprendente del caso es que Cauchy esta vez estaba equivocado porque, aunque el resultado propuesto por Ruffini era cierto, la demostración tenía un error.

CAUCHY Y LAS PERMUTACIONES

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) no se ocupó de forma directa del problema de la resolución general de las ecuaciones, pero sí

que lo hizo de las permutaciones, estudiándolas de forma independiente, lo que contribuyó al desarrollo posterior de los trabajos de Abel y Galois.

Cauchy fue uno de los grandes matemáticos de la época, fundamental para el desarrollo de la disciplina tanto en el campo del cálculo infinitesimal, al que dio el impulso definitivo, como en las ecuaciones diferenciales, la teoría de funciones de variable compleja, el álgebra y la física teórica. Junto con Gauss constituye la pareja fundamental de las matemáticas de la primera mitad del siglo XIX. Nació en París el 21 de agosto de 1789, poco más de un mes después de la caída de la Bastilla. Ingresó de forma brillante en la Escuela Politécnica (fue el segundo de los 105 admitidos en su promoción) y cursó estudios de ingeniería civil, que acabó antes de cumplir los veintiún años como el tercero de su promoción, y comenzó a ejercer su profesión en la construcción de un puerto. Pero entonces se despertó su interés por las matemáticas, siguiendo, al parecer, los consejos de Lagrange, y a partir de 1811 empezó a presentar de manera regular diferentes memorias de temas matemáticos a la Academia de Ciencias, en la que intentó ingresar para poder dedicarse de forma profesional a las matemáticas. Sin embargo, fracasó hasta tres veces.

Tras la caída definitiva de Napoleón y la restauración borbónica (1815), se oficializó el revanchismo contra todo lo que olía a republicano y napoleónico. Científicos reaccionarios sustituyeron a los progresistas en sus cargos, como sucedió con Monge o el físico Sadi Carnot en la Academia, a quienes relevó el propio Cauchy, de familia católica y conservadora y de mentalidad ultramonárquica.

Justamente ese mismo año de 1815 publicó en el *Journal de l'École Polytechnique* su «Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme» («Memoria sobre el número de valores que una función puede adquirir cuando sustituimos de todas las formas posibles las cantidades que contiene»). En esta memoria reconoció que los primeros que trataron sobre estos temas fueron Lagrange y el químico Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796), cuyas aportaciones fueron ampliadas por Ruffini. Cauchy mejoró la notación, proponiendo la

que se sigue utilizando en la actualidad, y fijó la teoría de permutaciones como rama independiente en las matemáticas. En este tema procedió como en las otras partes de las matemáticas en las que trabajó, poniendo a punto los axiomas y construyendo a partir de ellos una sólida estructura de teoremas y corolarios, con lo que consiguió dar un estatus de seriedad a la teoría de permutaciones.

Estaba ya todo a punto para abordar la imposibilidad de la resolución por radicales de las ecuaciones de grado mayor que 4. En ese momento fue cuando aparecieron primero Abel y después ya Galois —con los que Cauchy tuvo varios encontronazos—, que cerraron definitivamente el problema. El álgebra adquiría un nuevo rumbo.

CAPÍTULO 4

Revolución, matemáticas y muerte

Galois murió muy joven, antes de cumplir los veintiún años, a causa de una peritonitis provocada por las heridas que le produjeron en un misterioso duelo a pistola en mayo de 1831. A pesar de su juventud, destacó en su momento por su activismo en la lucha política y dejó para la posteridad un testamento matemático de gran importancia en el tema al que más se dedicó: las condiciones de resolubilidad de las ecuaciones.

Después de publicar su primer artículo, Évariste Galois se introdujo de lleno en el tema en el que haría sus principales aportaciones: las condiciones para que una ecuación sea resoluble. Con este propósito desarrolló la teoría de grupos, la puso en el candelero de la actividad matemática y dio un paso definitivo hacia el cambio de paradigma del álgebra, que pasaría a ser el estudio de las estructuras. Sin embargo, como en todos los cambios revolucionarios, los de Galois tuvieron que luchar contra las resistencias de los poderes científicos establecidos y la incomprensión de los principales matemáticos.

En el plano político tuvo lugar la revolución de 1830, que, en realidad, solo cambió la apariencia de la situación. En este contexto Galois se fue radicalizando y acabó siendo detenido. De hecho, pasó por la cárcel dos veces, y a la salida de esta tuvo un desenlace fatal: acabó malherido a causa de un duelo a pistola —cuyos motivos no están muy claros— y murió al día siguiente. Previendo el fatal desenlace, la noche anterior plasmó en papel todos sus avances matemáticos, los mismos que años después le otorgaron un lugar imperecedero en la historia de las matemáticas. Como afirmó el matemático francés Jules Tannery, «mientras haya matemáticos en la tierra, el nombre de Galois será ilustre».

GRANDES AVANCES

Hacia la primavera de 1829, Galois comenzó a atacar el problema pendiente en la resolución de ecuaciones con la ayuda y el apoyo del profesor Louis Richard: en concreto, buscaron caracterizar qué ecuaciones en particular son las que pueden resolverse por radicales. Para dicha tarea, Galois utilizó ideas nuevas, asociando una estructura a los coeficientes de la ecuación (el «grupo de la ecuación») y estudiando las características de los tipos que pueden aparecer (según cuáles sean habrá o no solución). Fue toda una revolución, ya que el álgebra dejaba de tener como objetivo la resolución de ecuaciones y comenzaba a ocuparse de caracterizar las distintas estructuras. En definitiva, constituyó el paso a las matemáticas modernas. Tanto Galois como Richard eran conscientes del valor de las ideas que iban surgiendo. Por eso el profesor opinaba que el joven Évariste debía ser admitido en la Escuela Politécnica directamente y sin examen, para tener el ambiente adecuado en el que desarrollar y profundizar sus teorías.

Mientras tanto, alumno y profesor redactaron dos importantes memorias que enviaron a la Academia de Ciencias. Los matemáticos de esta eran, según Richard, los más competentes para juzgarlas. Para que el dictamen fuera rápido y se reconociera la valía de los resultados conseguidos, el profesor Richard se dirigió directamente a Cauchy, a quien creía la persona apropiada para valorar las memorias. A pesar de ser poco dado a utilizar procedimientos no convencionales, Richard estaba convencido de la importancia de los trabajos de su discípulo.

EL RECHAZO DE CAUCHY

Seguro que el profesor de Galois no conocía lo que había sucedido entre Cauchy y Niels Henrik Abel tres años antes. El joven matemático noruego había intentado reunirse con Cauchy para exponerle sus estudios sobre la imposibilidad de la resolución algebraica de las ecuaciones generales de grado superior al cuarto, pero

no lo consiguió. Acabó redactando una memoria y enviándola a la Academia de Ciencias para que emitieran un informe sobre su valor. Esta le fue entregada a Legendre y a Cauchy para que opinaran sobre ella. Legendre concluyó que era muy difícil de leer, por lo que fue Cauchy el único encargado de juzgarla. Se la llevó a su casa y, sorprendentemente, la perdió, desentendiéndose de la misma, por lo que nadie contestó nunca a Abel.

> «En las ciencias las opiniones no cuentan para nada; los puestos no tendrían que ser la recompensa de una u otra manera de pensar en política o en religión.»
>
> — Évariste Galois.

En realidad, Cauchy, desde que fuera elegido académico en 1816, solo había presentado un trabajo que no fuera suyo. Pero esta vez entregó las dos memorias de Galois a la consideración de la Academia. Concretamente la primera en la sesión del 25 de mayo de 1829, titulada *Recherches algébriques* (*Investigaciones algebraicas*). Se solicitó a Jean-Baptiste Joseph Fourier y Claude-Louis Navier que la estudiaran y enjuiciaran. El 1 de junio, en la siguiente sesión, se presentó *Recherches sur les équations algébriques de degré premier* (*Investigaciones sobre las ecuaciones algebraicas de grado primo*), y serían Siméon Poisson y Cauchy los encargados de emitir el dictamen. Sin embargo, todos los académicos delegaron la responsabilidad en Cauchy, que era el que había aportado las memorias. Este se llevó a su casa los dos manuscritos con el consentimiento de sus colegas, con lo que se convirtió en el único garante de los mismos. Nunca los presentó en la Academia. Galois, además, jamás pudo recuperar lo que había entregado.

El curso escolar finalizó y Richard concedió a Galois el primer premio como mejor estudiante de su curso y como tal se presentó al concurso general de todos los centros de París. Este certamen consistió en un problema que Galois resolvió haciendo una generalización del mismo, algo no habitual en estudiantes de esa edad.

NIELS HENRIK ABEL

Niels Henrik Abel (1802-1829) nació en Oslo y creció entre grandes estrecheces económicas y problemas de salud. Tuvo la suerte de encontrar en la escuela episcopal un profesor de matemáticas que advirtió sus excepcionales cualidades matemáticas e hizo lo posible por desarrollarlas y darle la posibilidad de seguir estudiando. Con su apoyo, Abel logró una beca para la Universidad de Oslo. Durante el transcurso de sus estudios, Abel llegó a publicar trabajos en una revista científica noruega. De hecho, desde la secundaria estaba buscando la solución de la ecuación de quinto grado y creyó haberla encontrado. Pero siguió trabajando y al final del año 1823 se dio cuenta de un error que le llevó al resultado definitivo: la ecuación general de quinto grado no era resoluble por radicales, ni de índice cinco ni de ningún otro. Se cerraba la búsqueda de fórmulas de resolución, pero quedaba por encontrar las condiciones que debían cumplir las ecuaciones particulares para poder resolverse. El resultado de Abel fue reconocido en el mundo científico noruego, poco relevante en la época, y le sirvió para conseguir una beca para estudiar en países más avanzados. Primero fue a Berlín, donde le acogieron diferentes matemáticos, como August Leopold Crelle, fundador de la importante *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* (*Revista de Matemáticas Puras y Aplicadas*), en la que publicó varios artículos, entre ellos «Demostración de la imposibilidad de la resolubilidad algebraica de las ecuaciones generales de grado superior al cuarto», que recogía el resultado antes citado. Pero Abel no encontró un puesto de trabajo en Berlín y se trasladó a París en 1826. Después de sus infructuosos intentos por obtener audiencia con Cauchy y tras ser ninguneado por la Academia de Ciencias, se quedó en la capital francesa hasta que se le acabó el dinero de la beca. En ese momento, volvió a Berlín, pero Crelle no pudo conseguirle trabajo. En Oslo tampoco logró plaza para ejercer en la universidad, con lo que sus penurias continuaron. A ello se le añadió la tuberculosis, gravísima entonces, que, aunque no le impidió seguir trabajando, le llevó finalmente a la muerte en abril de 1829. Dos días después Crelle le comunicaba, tarde ya, que tenía trabajo en Berlín.

A pesar de ello, fue calificado en cuarto lugar, y como ganador se erigió Auguste Bravais (1811-1863), quien pasados unos cuantos años aplicó las ideas de Galois al estudio de la cristalografía. Así acabó la estancia de Galois en el liceo Louis-le-Grand.

EL VERANO DE 1829

Durante el verano de 1829 Galois tuvo que vivir dos sucesos desgraciados. En el plano personal tuvo lugar el suicidio de su padre y en el profesional fracasó en su segundo intento (y último posible) de entrar en la Escuela Politécnica.

El padre de Galois era el alcalde de Bourg-la-Reine. A pesar de su ideología liberal, y gracias al respaldo de la población, continuó en el cargo incluso después de la derrota de Napoleón y la restauración de la monarquía en Francia. Para apartarlo de la alcaldía, sus enemigos distribuyeron unos epigramas satíricos y licenciosos falsamente firmados por él. Como consecuencia del escándalo, el padre de Galois dejó el pueblo y se fue a París, donde este episodio de calumnias acabó provocándole una depresión profunda que le llevó al suicidio el 2 de julio de 1829.

Como es de suponer, el suicidio de su padre provocó una gran impresión en el joven Galois. El funeral estuvo, además, teñido de polémica. El cortejo fúnebre partió de una iglesia de París en dirección hacia Bourg-la-Reine y, antes de llegar al pueblo, sus habitantes salieron a recoger el cadáver para transportarlo a hombros. El párroco, de ideología reaccionaria, se presentó a oficiar el funeral y, entre el tumulto y los gritos, recibió una pedrada en la frente. Toda la población participó en una colecta para sufragar un monumento fúnebre en honor a su antiguo alcalde. Aún hoy, en la fachada del ayuntamiento de Bourg-la-Reine, una lápida recuerda la memoria del padre de Galois.

Évariste contempló estos hechos, que sin duda contribuyeron a alimentar su pasión política y su espíritu rebelde contra la injusta situación imperante, un inconformismo que sería parte fundamental de su vida en adelante. Su tío, teniente coronel retirado de

LA IMPOSIBILIDAD

Con la ecuación general de quinto grado, por primera vez un problema matemático se resolvía con la demostración de su imposibilidad. Constituyó, además, el inicio de otras demostraciones de la imposibilidad de resolver problemas clásicos. A lo largo del siglo XIX se demostró que no tenía solución ninguno de los tres problemas más famosos de la Grecia clásica: la cuadratura del círculo —«hallar el lado de un cuadrado cuya área sea la misma que la de un círculo», precisando que las áreas deben ser iguales, no aproximadamente iguales—, la trisección de un ángulo —«utilizando únicamente la regla y el compás, dividir un ángulo en tres partes iguales»— y la duplicación del cubo —«hallar la arista de un cubo cuyo volumen sea doble que el de un cubo dado»—. La razón está en el carácter de números irracionales de π, $\sqrt{2}$ o $\sqrt[3]{2}$. En 1931 el austríaco Kurt Gödel (1906-1978) demostró que ningún lenguaje lógico que incluyera el lenguaje de la aritmética era decidible. Un sistema es decidible cuando puede saberse si son verdaderos o falsos todos los resultados que se escriben en él, si puede decidirse sobre su verdad o falsedad. Luego para cualquier conjunto de axiomas para la aritmética siempre habrá proposiciones de las que no pueda decirse si son verdad o mentira. Con eso quedaba resquebrajada la presunción de que el lenguaje matemático era verdadero por sí mismo y el halo de seguridad que las matemáticas parecían conferir a todas las ramas del conocimiento en cuanto pudieran traducirse a su lenguaje.

El matemático austríaco Kurt Gödel retratado por Alfred Eisenstaedt.

El fin del optimismo

Por entonces se establecieron otros resultados, como el «principio de incertidumbre» de Werner Heisenberg (1901-1976) sobre la imposibilidad de conocer simultáneamente la posición y la velocidad de los electrones en el átomo, que limitaban el optimismo reinante sobre la capacidad del ser humano para conocer la naturaleza y actuar en ella. Más tarde se tomaría conciencia de que la interacción humana con el entorno puede ser conflictiva si no se tienen en cuenta las limitaciones de recursos, poniendo en peligro incluso la supervivencia humana: la ecología aporta nuevas limitaciones a la actividad humana.

la guardia napoleónica, pasó a ser el tutor de los hermanos Galois, todos ellos aún menores de edad.

> «Estamos en lo cierto si decimos que se ha desarrollado desde hace unos años una nueva ciencia [...] que consiste en el conocimiento de las cosas que no gustan a los señores examinadores, así como de sus preferencias científicas, manías y humor.»
>
> — Évariste Galois.

Con un ánimo en no muy buen estado, Évariste tuvo que repetir ese mes de julio de 1829 el trascendental examen de ingreso en la Escuela Politécnica. Los dos examinadores que le tocaron en suerte no eran muy brillantes: de Charles-Louis Dinet solo se recuerda que formó parte del tribunal que juzgó a Galois; Louis Lefébure de Fourcy, el segundo, era autor de anodinos libros de texto. Ambos, sin embargo, eran conscientes de su poder para decidir el porvenir de los candidatos, aunque no tanto del de descubrir su capacidad. Era previsible el choque entre dos visiones muy diferentes del mundo y de las matemáticas. Saltaron chispas y los hechos confirmaron esta disparidad de criterios: Évariste Galois fue suspendido de nuevo.

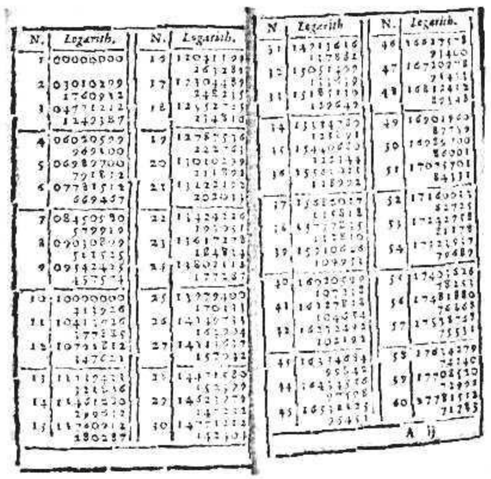
El examen ha pasado a ser legendario. Los miembros del tribunal pidieron a Galois que explicara la teoría de los logaritmos, cosa que este hizo siguiendo una vía diferente de la expuesta en los textos escolares. Los examinadores le pusieron objeciones muy elementales. Évariste creía que unas preguntas tan sencillas eran para humillarle y acabó tirando el borrador a la cabeza de uno de los profesores. Con ello firmaba la calificación de su examen y se cerraba la posibilidad de acceder a la Escuela Politécnica. Un comentario escrito veinte años después en *Nouvelles Annales Mathématiques* lo resumía de la siguiente forma: «Un candidato con inteligencia superior se pierde por un examinador de una inteligencia más inferior. *Barbarus hic ego sum quia non intelligor illis* [Yo soy el bárbaro porque no me entienden]».

LOS LOGARITMOS

Los logaritmos fueron un avance importante en la historia del cálculo. Puestos a punto por John Napier (1550-1617) en 1614, se basan en un concepto sencillo y siguen siendo actuales, porque las calculadoras y los ordenadores continúan utilizando los logaritmos para funcionar. Elegido un número —por ejemplo, 10— que se toma como base de logaritmos, se llama logaritmo de un número positivo cualquiera al exponente al que hay que elevar la base para que dé ese número. Así, el logaritmo en base 10 de 100 será 2, porque $10^2=100$, lo que se escribe como $\log_{10}100=2$. También $\log_{10}1000=3$, porque $10^3=1000$. En general $\log_{10}N=a$ es equivalente a $10^a=N$. Dada una base, todo número positivo cuenta con su logaritmo, que casi siempre es un número decimal y bastante complicado de hallar. Pero una vez que se tiene una lista de logaritmos de números, operar es mucho más fácil. Es sabido que para multiplicar potencias de la misma base hay que sumar los exponentes ($N^a \cdot N^b = N^{a+b}$); para dividir potencias hay que restarlos ($N^a : N^b = N^{a-b}$); para elevar una potencia a otra potencia hay que multiplicar los exponentes ($(N^a)^b = N^{a \cdot b}$), y para extraer una raíz de una potencia hay que dividir el exponente por el índice de la raíz ($\sqrt[a]{N^b} = N^{b/a}$). Por tanto, el logaritmo de un producto de dos números —que es el exponente de una potencia— será la suma de los logaritmos de los factores; el logaritmo del cociente será la diferencia de los logaritmos de dividendo y divisor; el logaritmo de una potencia resulta de multiplicar el exponente por el logaritmo de la base, y en el caso de una raíz habrá que dividirlo por el índice.

Simplificar operaciones

El invento de los logaritmos transforma la multiplicación en suma, la división en resta, las potencias en productos y las raíces en divisiones, simplificándose, pues, los cálculos. Más aún desde que Henry Briggs (1561-1630) elaborara las tablas de logaritmos con suficiente precisión. Y esta simplificación llegó al extremo con la idea de un artefacto mecánico que ponía al lado de cada número su logaritmo y que permitía la realización mecánica de operaciones: fue la llamada «regla de cálculo», verdadero instrumento portátil de cálculo aproximado que fue un útil imprescindible para los ingenieros hasta la invención de la calculadora electrónica.



Ejemplo de las tablas de logaritmos ideadas por Henry Briggs.

Como la situación económica de la familia Galois no era demasiado buena, Évariste necesitaba una beca para proseguir sus estudios. Eso era posible si entraba en la Escuela Preparatoria (la antigua Escuela Normal), donde se formaban los futuros profesores de enseñanza secundaria a lo largo de dos cursos. No debía de entusiasmarle mucho, porque el nivel de la institución era muy inferior del de la Politécnica y, además, se trataba de un ambiente profundamente reaccionario: en él era obligatorio realizar diversas prácticas religiosas, como rezar al inicio y fin de las clases y en cada comida, y confesarse al menos una vez al mes. Su incumplimiento durante dos meses era sancionado con la expulsión inmediata.

Pero incluso para entrar en la Escuela Preparatoria había inconvenientes, ya que el plazo de presentación de solicitudes había finalizado. Galois tuvo que redactar una carta solicitando su admisión en la lista de aspirantes, que entregó junto con una recomendación del profesor Richard. Esta carta tiene un tono respetuoso y formal, y quizá fue escrita al dictado. Galois fue admitido a realizar los exámenes escritos, que tuvieron lugar del 20 al 25 de agosto, y en ellos quedó segundo de los cinco candidatos. Aprobado el ejercicio escrito, para que la admisión fuese definitiva era necesario conseguir los títulos de bachiller en ciencias y en letras, y superar después todavía otro examen oral de control. Como a Évariste solo le interesaban las matemáticas y no tenía muy claro el porvenir de la docencia, los exámenes se le hicieron difíciles.

El 9 de diciembre suspendió el primer intento de obtener el bachiller en letras. Lo consiguió una semana más tarde. El día 29 de ese mismo mes consiguió también el título de bachiller en ciencias. Para entrar en la Escuela Preparatoria solo faltaba el examen oral, en el que se lució en matemáticas. Por una vez tuvo suerte y el profesor encargado de la disciplina escribió sobre su examen: «Este alumno deja a veces algunos puntos oscuros en la exposición de sus ideas, pero es inteligente y revela un espíritu de investigación notabilísimo. Me ha hecho conocer observaciones nuevas sobre el análisis aplicado». Nada habitual, ni entonces ni ahora, que un profesor confiese que ha aprendido algo de un alumno. El profesor de física tenía otra opinión: «Es el único alumno que me

ha contestado mal: no sabe absolutamente nada. Me han dicho que este alumno es destacado en matemáticas, lo que me extraña mucho porque, a juzgar por el examen, lo creo poco inteligente; o por lo menos su inteligencia está tan escondida que me ha sido imposible descubrirla; si es realmente como me ha parecido, dudo mucho que pueda ser un buen enseñante». Al final fue admitido y el 20 de febrero de 1830 firmó su compromiso de dedicarse durante diez años a la enseñanza pública.

MÁS OPORTUNIDADES PERDIDAS

Galois superó el primer curso en junio con un examen sobre cálculo diferencial e integral, precisamente ante un tribunal del que formaba parte Cauchy. Entretanto, le surgió una nueva oportunidad de someter a consideración pública la valía de sus resultados: la Academia de Ciencias convocó en enero de 1830 el Gran Premio de Matemáticas, destinado a premiar trabajos importantes publicados desde enero de 1828, con un plazo de presentación hasta el 1 de marzo. Galois presentó una de las memorias que había «extraviado» Cauchy, a la que realizó algunas modificaciones. Si él era brillante, sus competidores no lo eran menos. Jóvenes entonces, ahora son bien conocidos: Carl Gustav Jakob Jacobi, Jean-Victor Poncelet, Joseph Liouville, Jacques Charles François Sturm o Peter Gustav Lejeune Dirichlet, entre otros. Además, la Academia de Ciencias aprovechó para saldar una deuda pendiente con Abel, que había muerto hacía unos meses y al que había ninguneado poco antes. Se otorgó el Gran Premio a Jacobi y, a título póstumo, a Abel. El trabajo de Galois, continuando con su mala suerte con las instituciones, no fue examinado por el jurado del premio porque el original se lo llevó a su casa Fourier, quien murió al poco tiempo.

Con las revistas Galois tenía más reconocimiento, y en 1830 aparecieron artículos suyos en otra prestigiosa publicación, *Bulletin de Férussac*: «Analyse d'un mémoire sur la résolution algébrique des equations» («Análisis de una memoria sobre la resolución algebraica de las ecuaciones») en el número de abril, «Note sur la résolution des équations numériques» («Nota sobre la resolución de las ecuaciones numéricas») y «Sur la théorie des nombres» («Sobre la teoría de los números») en junio. En esa revista

¿CÓMO SER RECONOCIDO POR LA ACADEMIA?

La Academia de Ciencias de Francia fue creada por Luis XIV en 1666, seis años después de la primera gran sociedad europea, la Royal Society inglesa. Siempre fue una institución de alto nivel. Ya su primer director ya fue un prestigioso científico, Christiaan Huygens (1629-1695), matemático y astrónomo neerlandés, y constructor del primer reloj preciso (con un error menor de 1 segundo por hora). La Convención republicana decidió suprimirla en 1793: la época del Terror no fue muy propicia para el desarrollo de las ciencias. Poco después, se creó un Instituto de las Ciencias y las Artes, fruto de la Ley sobre la organización de la Instrucción pública de 1795. Su fin era «perfeccionar las ciencias y las artes por investigaciones continuadas, por la publicación de los descubrimientos, por la correspondencia con sociedades académicas y extranjeras». De él formaban parte 144 miembros y estaba dividido en tres secciones, una de ellas de ciencias físicas y matemáticas. Esta parte se transformó en Academia de Ciencias de nuevo por orden del nuevo rey en marzo de 1816. En la época de Galois, cuando se quería que un trabajo matemático fuera tomado en consideración por la Academia, el procedimiento normal era enviarlo a la secretaría, que le daba el registro de entrada y lo colocaba en la lista de los trabajos pendientes de estudiar. Se encomendaba a algunos de los académicos especialistas en el tema que lo examinaran y dieran su opinión al resto en una de las sesiones plenarias. Tomando como base ese informe tenía lugar la discusión sobre la memoria presentada. A veces se seguía un camino más directo: se hacía llegar el trabajo a alguno de los académicos y era él quien, directamente, dando ya un primer reconocimiento con la toma en consideración, lo presentaba en una de las sesiones. A partir de ahí el procedimiento seguido era el mismo que en el otro caso.

había también artículos de grandes matemáticos, como Michel Chasles, Siméon Poisson y el mismo Cauchy, mientras que Galois era un estudiante de un centro de segundo orden.

LA LUCHA POLÍTICA

Desde sus tiempos en el liceo Louis-le-Grand, Galois había mostrado un gran interés en la política. De hecho, sus ideas progresistas fueron una de sus motivaciones para entrar en la Escuela Politécnica. Sin embargo, su compromiso explícito empezó en la Escuela Normal (de nuevo, el nombre de la Escuela Preparatoria a partir de 1831), donde se hizo amigo de Auguste Chevalier, estudiante de segundo año, cuyo hermano Michel estudiaba en la Politécnica. Galois, influido por ambos, radicalizó sus posiciones. Los hermanos Chevalier eran sansimonianos, es decir, seguidores de la ideología de los seguidores de Henri de Saint-Simon (1760-1826), precursor del socialismo. Saint-Simon propugnaba la abolición de la propiedad privada y era partidario de la propiedad pública de las riquezas con el objetivo de acabar con las diferencias sociales, todo con un decidido pacifismo. Asimismo, propugnó la liberación de las mujeres y la mejora de las durísimas condiciones de vida en las prisiones y los manicomios.

La situación política en Francia era cada vez más grave. Había grandes dificultades para encontrar trabajo y en 1827 tuvieron lugar diversas protestas callejeras por el aumento del precio del pan. En las elecciones de 1827 triunfaron los monárquicos moderados, pero el rey continuó con su política ultraconservadora. El pueblo se sublevó en París y otras ciudades francesas en julio de 1830, en los tres días conocidos como «las Tres Gloriosas». La población levantó barricadas y se enfrentó al ejército. Este no pudo contener la rabia popular, que daba vivas a la república. El rey abdicó en su nieto, pero ya era tarde: apoyado por los liberales moderados, se impuso la candidatura de un rey menos reaccionario, Luis Felipe de Orleans. Llamado «rey ciudadano», este actuó como representante de la gran burguesía pujante y enfrentada a los monárquicos

reaccionarios en la disputa del poder político. Eso supuso un cierto cambio de formas, pero buena parte del pueblo se sintió pronto traicionado y continuó el combate contra la nueva monarquía y un nuevo poder que no les resolvía los problemas.

Los estudiantes de la Escuela Normal se mostraron decididos partidarios de la revolución de julio, pero el director de la institución les recordó sus obligaciones como funcionarios del Estado: para evitar su participación en los acontecimientos, prohibió a los alumnos salir a la calle. A las rejas de las ventanas se sumaron las puertas cerradas con llave. Galois se tuvo que contentar con observar los sucesos revolucionarios desde la seguridad de las ventanas. Los alumnos de la Politécnica, por el contrario, participaron de forma entusiasta en las barricadas parisienses que hacían frente a la tiranía borbónica.

Después de los sucesos revolucionarios, Galois se fue a su casa a pasar el período vacacional. A su vuelta a París, tuvo la oportunidad de contactar, gracias a los hermanos Chevalier, con otros jóvenes republicanos de izquierda, como el activista político Louis-Auguste Blanqui y el científico François-Vincent Raspail, con los que pasó a militar en la Societé des Amis du Peuple (Sociedad de Amigos del Pueblo), una organización muy activa que optaba por métodos violentos para lograr el cambio social. Tras su disolución por orden judicial, comenzó a actuar en la clandestinidad, y sus miembros pasaron a ser considerados muy peligrosos por la prensa oficialista. Contaba con una sección armada de miembros de artillería de la Guardia Nacional, un cuerpo especial del ejército de tradición republicana surgido en la Revolución de 1789 para defender las conquistas del pueblo.

Influido por este ambiente, Galois comenzó a ser más reivindicativo en la Escuela Normal. Solicitó al director, entre otras cosas, que los alumnos vistieran un uniforme de tipo militar parecido al de la Politécnica, que fueran armados y que tuvieran formación militar. Sin embargo, no tuvo demasiado apoyo entre los compañeros.

El enfrentamiento con la dirección de la Escuela Normal culminó el 9 de diciembre, cuando Galois fue expulsado. La excusa fue una carta anónima aparecida en *La Gazette des Écoles*, periódico progresista dirigido a estudiantes, en la que se ponía de ma-

nifiesto la actitud del director en la revolución de julio. Galois desmintió ser el autor de la misiva, pero aun así fue acusado de ello. Estalló una gran polémica. Otros alumnos de la escuela intentaron defenderlo e incluso un periódico no escolar, *Le Constitutionel*, publicó una nota pidiendo al ministro de Educación que reconsiderara la expulsión de Galois, considerada un abuso de autoridad de la dirección sobre uno «de los mejores alumnos» de la Escuela Normal. A pesar de todo ello, el ministerio confirmó la expulsión del joven matemático el 4 de enero de 1831.

Antes, en el mes de diciembre, Galois se había enrolado en la artillería de la Guardia Nacional, pero en ella duró poco: el último día del año, el rey Luis Felipe destituyó al jefe de la organización y la disolvió. Los miembros de la Guardia que no aceptaron el decreto fueron detenidos y procesados, lo cual fue otro motivo de oposición al rey. Cuando comenzaba el nuevo año, por tanto, Galois ya no era ni estudiante ni miembro de la Guardia Nacional.

Paralelamente, el 2 de enero Galois publicó una carta muy crítica en *La Gazette des Écoles* titulada «Sur l'enseignement des sciences» («Sobre la enseñanza de las ciencias»), en la que el joven matemático exponía el margen de mejora de la educación científica en Francia, considerada puntera en esos momentos.

> ¿Hasta cuándo los pobres jóvenes estarán obligados a escuchar o repetir todo el día? ¿Cuándo se les dejará tiempo para meditar sobre ese montón de conocimientos, para coordinar esa multitud de proposiciones sin continuación, de cálculos sin relación? ¿No tendría alguna ventaja el exigir a los alumnos los mismos métodos, los mismos cálculos, las mismas formas de razonamiento, si eran a la vez los más simples y los más fecundos? Pero no, se enseñan minuciosamente teorías truncadas y cargadas de reflexiones inútiles, mientras que se omiten las proposiciones más simples y más brillantes del álgebra; en lugar de eso, se demuestran con gran coste de cálculos y con razonamientos siempre largos, y a veces falsos, corolarios cuya demostración se hace por sí sola.

Y también hay ecos de sus malas experiencias con los exámenes: «¿Por qué los examinadores no hacen las preguntas a los candidatos más que de una manera enredadora? Parecería que temieran ser entendidos sobre lo que preguntan».

La expulsión de Galois de la Escuela Normal implicó la pérdida de la beca, por lo que el joven matemático tuvo que hacer frente a su supervivencia económica. Para ello publicó un anuncio en *La Gazette* que decía lo siguiente:

> Curso de álgebra dirigido a los estudiantes que deseen emprender un estudio más profundo del álgebra, puesto que en los colegios esta rama de la matemática no se trata de forma completa. El curso constará de lecciones teóricas, algunas de las cuales son nuevas. Ninguna ha sido publicada o desarrollada en conferencias públicas. Nos limitamos a recordar una nueva teoría de los números imaginarios, la teoría de las ecuaciones resolubles por radicales y la teoría de las funciones elípticas tratadas como álgebra pura.

Las lecciones tenían lugar en una conocida librería, pero, a pesar del éxito inicial (40 asistentes), poco a poco los alumnos se fueron descolgando y Galois tuvo que recurrir a ofrecer clases particulares.

Ese inicio del año 1831 no solo trajo malas noticias para Galois, sino que también se produjo un hecho esperanzador: Siméon Poisson le invitó a enviar a la Academia de Ciencias una nueva versión de su memoria sobre las ecuaciones algebraicas. Así lo hizo: el 16 de enero el joven matemático entregó su trabajo en la secretaría de la Academia y fue presentado en la sesión del día siguiente, bajo el título *Les conditions de résolubilité des équations par radicaux* (*Las condiciones de resolubilidad de las ecuaciones por radicales*), citando mal el nombre de su autor, a quien se presentaba como «Le Gallois». En ese momento se les encargó al propio Poisson y a Sylvestre-François Lacroix que hicieran un informe sobre el mismo. Había que esperar, y no poco: a los dos meses (concretamente el 31 de marzo), Galois dirigió una carta bastante desabrida al presidente de la Academia pidiendo cuenta de qué había pasado con su memoria, en la que escribió: «Tened a bien, señor presidente, hacerme perder la inquietud invitando a los señores Lacroix y Poisson a declarar si

han "perdido" mi memoria o si tienen la intención de rendir cuenta de ella a la Academia».

Se sabe que Galois asistía a las sesiones públicas de la Academia porque en abril de 1831 la matemática Sophie Germain, en una carta al italiano Guglielmo Libri (1803-1869), se refiere a Galois diciendo que «ha mantenido su costumbre de insultar, una de cuyas pruebas la ha dado en tu mejor conferencia en la Academia [en la que Libri presentó una memoria sobre la resolución de una clase de ecuaciones algebraicas]». Parece evidente que Galois era cualquier cosa menos simpático, por lo menos en sus relaciones con los matemáticos establecidos, y que aprovechaba cualquier oportunidad para importunarlos y contestarles airadamente. Quizá por eso los académicos no pusieron ninguna diligencia en emitir su parecer sobre su memoria. Y no lo harían hasta que presiones exteriores les forzaron a hacerlo.

REPRESIÓN Y CÁRCEL

Al poco se produjo un acontecimiento capital en la vida del joven Galois: diecinueve oficiales de artillería fueron detenidos y acusados de conspiración contra el Estado. El proceso tuvo un gran eco en París y, ante el temor de altercados por el veredicto, todos ellos fueron absueltos. La Societé des Amis du Peuple organizó un banquete en honor de los encausados donde se juntó lo más granado de la oposición al rey: el novelista Alexandre Dumas, que asistió al acontecimiento, escribió en sus memorias que «habría sido difícil encontrar en todo París doscientos comensales más hostiles al gobierno». Galois se convirtió en uno de los protagonistas de la celebración cuando levantó su copa e hizo un brindis a la salud del monarca Luis Felipe mientras sostenía un cuchillo con la otra mano. Algunos asistentes siguieron su ejemplo, pero otros se fueron a toda prisa, e incluso hubo quien saltó por la ventana hacia el jardín, por miedo a la policía política. En efecto, al día siguiente, Galois fue detenido en su casa, acusado de incitar al atentado contra la vida del rey, y conducido a la cárcel parisina de Sainte-

Pélagie hasta la celebración del juicio. Fue una estancia de más de un mes, ya que el proceso no comenzó hasta el 15 de junio.

En el juicio Galois confesó las palabras que había pronunciado en su hostil brindis a la salud de Luis Felipe: «... si traiciona», unas palabras que no se oyeron por el tumulto, cosa que atestiguaron los asistentes. Al final fue declarado no culpable. Según el relato de Dumas, Galois fue puesto en libertad inmediatamente y «va directo a la mesa sobre la que estaba el cuchillo abierto como pieza de convicción, lo coge, lo cierra, se lo mete en el bolsillo, saluda al tribunal y se va».

EL INFORME DE LA ACADEMIA

De las noticias que en los periódicos aparecieron el día del juicio a Galois, destaca una nota sin firma en el periódico de tendencia sansimoniana *Le Globe*, en la que se calificaba a Galois de «destacado matemático» y preguntaba por el estado de su memoria presentada a la Academia. Tal vez fue esta la causa directa de que los académicos Lacroix y Poisson se apresuraran para presentar su informe en la sesión del 4 de julio. Este, sin embargo, no fue positivo, en absoluto. Ninguno de los dos entendió el contenido:

> Comoquiera que sea, hemos hecho todos los esfuerzos por comprender la demostración del Sr. Galois. Sus razonamientos no son ni bastante claros ni bastante desarrollados para que hayamos podido juzgar su exactitud y no estaríamos incluso en disposición de dar una idea de ellos en este Informe. El autor anuncia que la proposición que es el objeto especial de su memoria es una parte de una teoría general susceptible de muchas otras aplicaciones. A menudo sucede que las diferentes partes de una teoría, iluminándose mutuamente, son más fáciles de entender en su conjunto que aisladamente. Se puede pues esperar que el autor haya publicado su trabajo completo para formarse una opinión definitiva; pero en el estado en que está la parte que ha sometido a la Academia, no podemos proponeros de darle vuestra aprobación.

Quizá la falta de una preparación escolar más ortodoxa impidió a Galois hacer una presentación convencional, lo que fue una excusa para que los académicos no la tomaran en consideración. También podría temerse que, tal vez, una mayor dedicación a seguir los caminos marcados de la enseñanza paso a paso, limitándose a seguir las rutas ya recorridas por otros, hubiera matado buena parte de las iniciativas revolucionarias que propuso. La solución a los problemas que abordaba, por tanto, no habría dado ningún fruto. No cabe duda de que este nuevo revés en el reconocimiento académico de sus trabajos matemáticos debió de suponer un golpe importante para Galois. Y que le llevaría a dedicar mayores energías a la lucha política.

SEGUNDA DETENCIÓN

Poco después, y no hacía todavía un mes que estaba en libertad, llegó el 14 de julio, el aniversario de la Revolución. Los republicanos convocaron una manifestación en la Bastilla para plantar allí el árbol de la libertad, pero la policía confiscó los carteles e intentó apresar a los responsables de la organización. Galois fue detenido al día siguiente, cuando estaba en compañía de su amigo Ernest Duchâtelet y vestido con el uniforme —ilegal— de artillería de la Guardia Nacional. Además, se encontraba armado. Galois fue conducido de nuevo a la prisión de Sainte-Pélagie, y condenado en octubre a seis meses de cárcel, que se sumaron a los tres que ya llevaba en prisión preventiva.

A pesar de las penosas condiciones de vida en la cárcel, allí Galois contó con la solidaridad de sus compañeros y, sobre todo, con tiempo, que dedicó, entre otras cosas, a redactar un prólogo para su memoria, el «Préface à deux mémoires d'analyse pure» («Prefacio de dos memorias de análisis puro»), fuertemente crítico contra los poderes científicos establecidos, y una nota sobre Abel. En esta Galois reconoce haber cometido, a los dieciséis años, el mismo error que el matemático noruego: creer haber resuelto la ecuación general de quinto grado. Su moral, sin embargo, era muy baja.

En ese momento una grave epidemia de cólera se estaba extendiendo por toda Francia. Fue tan alarmante que las autoridades incluso tuvieron en cuenta a los internos en las cárceles, y se decidió excarcelar, por lo menos, a los más jóvenes y a los que no gozaban de buena salud. Galois cumplía ambas condiciones. En marzo de 1832 fue trasladado a una casa de salud en París, donde permaneció como detenido «bajo palabra».

En la clínica trabajaba el médico Jean-Louis Poterin Du Motel, de una de cuyas hijas, Stéphanie, Galois se enamoró locamente. No es fácil saber cuál fue su relación, si ella compartió su amor o si lo rechazó desde el principio, pero de las dos cartas que ella le escribió y que Galois destruyó se concluye que rompió con él. El inicio de la primera es claro: «Por favor, rompamos nuestras relaciones. No tengo bastante ánimo para seguir una correspondencia de esta naturaleza, pero me esforzaré en reunir el suficiente para conversar contigo como lo hacía antes de que nada sucediera». Galois queda desolado por la ruptura, escribe las iniciales de ella, mezcla las iniciales S y G de ambos… Su depresivo estado anímico queda claro en una carta a Auguste Chevalier del día 25 de mayo: «¿Cómo puedo consolarme cuando, en un mes, he agotado la más rica fuente de felicidad que puede tener el hombre, cuando la he agotado sin felicidad, sin esperanza, cuando estoy cierto de haberla secado de por vida?».

EL FINAL

En la primavera de 1832 la situación política en Francia continuaba agitada. Incluso se producían conflictos en el seno de la facción monárquica, entre los partidarios de los borbones y los del rey Luis Felipe de Orleans. La represión policial, empero, se cebaba con los republicanos. El partido de Galois se encontraba en la clandestinidad e intentó forzar una sublevación popular, con las masas en lucha por las calles de París, oponiéndose a las fuerzas de represión, como ya habían hecho en el cercano 1830. Consideraban que era necesaria una revolución a mano armada

y quisieron encender la chispa que acelerase los acontecimientos, esa pequeña gota que desbordara el vaso de la indignación popular y en la que convergieran todas las posiciones descontentas de la sociedad. Se sugirió que lo ideal sería un cadáver republicano que hubiera muerto a manos de la policía. Y que, si no existía, se podía «fabricar», siempre que hubiera alguien dispuesto a inmolarse.

Es obvio que no existen las actas de las discusiones ni comentarios contemporáneos sobre las diferentes posiciones, pero es razonable suponer que Évariste se posicionaba entre los más extremistas, tanto por su historia pasada —dos estancias en la cárcel en el último año—, como por su carácter arisco e introvertido y la falta de motivaciones en la vida: escasos amigos, peleas familiares, poco dinero, falta de reconocimiento de su labor matemática y, finalmente, un reciente desengaño amoroso que le debió de sumir un poco más en la depresión.

El día 25 de mayo Galois dirigió una carta a Chevalier en la que no muestra mucho ánimo, pues le dice lo siguiente:

> Hay seres destinados quizás a hacer el bien, pero a no disfrutarlo nunca. Creo ser uno de esos [...]. Me dices que los que me quieren deben ayudarme a superar las dificultades que me pone el mundo. Los que me quieren son escasos, como sabes. Eso quiere decir, por tu parte, que te crees obligado a hacer lo mejor que sabes para convencerme. Pero es mi deber prevenirte, como he hecho cien veces, de la inutilidad de tus esfuerzos.

Y añade en la posdata: «Estoy desencantado de todo, incluso del amor a la gloria». Y se refiere a la necesidad de la violencia en las revueltas —a la que se opone Chevalier como sansimoniano— al decirle que «cuando la violencia no sea una necesidad en mi convicción, lo será en mi corazón. No quiero haber sufrido sin vengarme. Aparte de eso seré de los vuestros».

El día 29 de mayo Galois escribió tres cartas. La primera la dirigió «a todos los republicanos», sus correligionarios, en la que les solicitó que no le reprocharan no haber muerto por su país, sino hacerlo «víctima de una infame coqueta». La segunda la escribió a «sus buenos amigos» N. L. y V. D. (quizá Napoleón Lebon y Vincent Delaunay, este detenido junto a Galois el 14 de julio), y en ella anuncia su muerte al día siguiente a causa de un duelo al que «ha sido imposible negarme», y ruega: «Guardad mi recuerdo, ya que la suerte no me ha dado bastante vida para que la patria conozca mi nombre». La tercera carta la envió a Auguste Chevalier y es una recopilación de sus descubrimientos matemáticos. En ella escribió lo siguiente:

> Querido amigo, he hecho en análisis muchas cosas nuevas. Unas tienen relación con la teoría de las ecuaciones; las otras, con las funciones integrales [...]. Pedirás públicamente a Jacobi o Gauss que den su parecer, no sobre la validez, sino sobre la importancia de estos teoremas. [...] Después de esto habrá, espero, gentes que encontrarán provechoso descifrar todo este lío. Te abrazo efusivamente.

En esa carta puede verse una nota en el margen que indica lo siguiente: «Falta algo para completar la demostración. No tengo tiempo», lo que ha contribuido a la leyenda de que Galois pasó toda esa noche anterior recopilando sus descubrimientos y en particular sus avances sobre la teoría de grupos.

A la mañana siguiente, como pronosticaban las cartas, Galois resultó herido grave de bala en el abdomen por una pistola disparada a unos veinticinco pasos que le atravesó el intestino en varios sitios. Su adversario y los padrinos del duelo le dejaron malherido (quizás acudieron a buscar auxilio) y fue un antiguo oficial quien lo encontró en la calle y lo trasladó al hospital. A su hermano Alfred, que llegó al ser avisado, le dijo que su contrincante era un policía. A primeras horas del día siguiente, como consecuencia de la herida, Évariste sufrió una peritonitis aguda, infección de pronóstico mortal. No quiso ni hablar con el sacerdote que apareció por allí. Sus últimas palabras las dirigió a su hermano: «No llores, me hace falta todo el ánimo para morir a los veinte años». Y falleció a las diez de la mañana del 31 de mayo de 1832.

El 1 de junio tuvo lugar el entierro en el cementerio parisino de Montparnasse, donde los restos de Galois fueron depositados en la fosa común. El cortejo lo formaba una concentración de unos

tres mil republicanos reunidos para rendirle un último homenaje, en un clima de tensión y vigilado a distancia por la policía, donde se mezclaban las palabras de elogio de los correligionarios con los gritos revolucionarios.

La muerte de Galois apareció en todos los periódicos de París, aunque sin un espacio destacado. La carta de Évariste a Chevalier del 29 de mayo, junto con una nota necrológica, se publicó en el número de septiembre de la *Revue Encyclopédique*. Esta no despertó un interés especial.

HIPÓTESIS SOBRE LA MUERTE DE GALOIS

Las oscuras circunstancias de la muerte de Évariste Galois tiñen de misterio las últimas horas de vida del matemático. Como en el álgebra —que tanto avanzó gracias a él—, las incógnitas por despejar sobre el caso son muchas. ¿Quién fue su adversario en el duelo? ¿Cuáles fueron las razones del mismo? Si Galois tenía tan claro el desenlace, ¿era un duelo o una encerrona? En este segundo caso, ¿por qué no pidió ayuda o incluso huyó?

Sobre el adversario, a pesar de que el propio Galois le dice a su hermano que se trató de un policía, esta hipótesis no parece probable, puesto que no era habitual que se utilizara un pistolero profesional para matar republicanos: simplemente se les juzgaba y se les imponían duras condenas, pero no se atentaba físicamente contra ellos. Louis-Auguste Blanqui, por ejemplo, fue condenado a muerte y amnistiado, y François-Vincent Raspail, por su parte, fue enviado al exilio.

Hay dos testimonios sobre el suceso. El 3 de junio en *Le Précurseur*, periódico progresista de Lyon, se comenta lo siguiente:

> El joven Évariste Galois [...] se ha batido con un viejo amigo suyo, un hombre muy joven como él, como él miembro de la Societé des amis du peuple. [...] A bocajarro cada uno de ellos estaba armado con una pistola y ha hecho fuego. Solo una de estas armas estaba cargada [...]. L. D., su adversario, era un poco más joven que él.

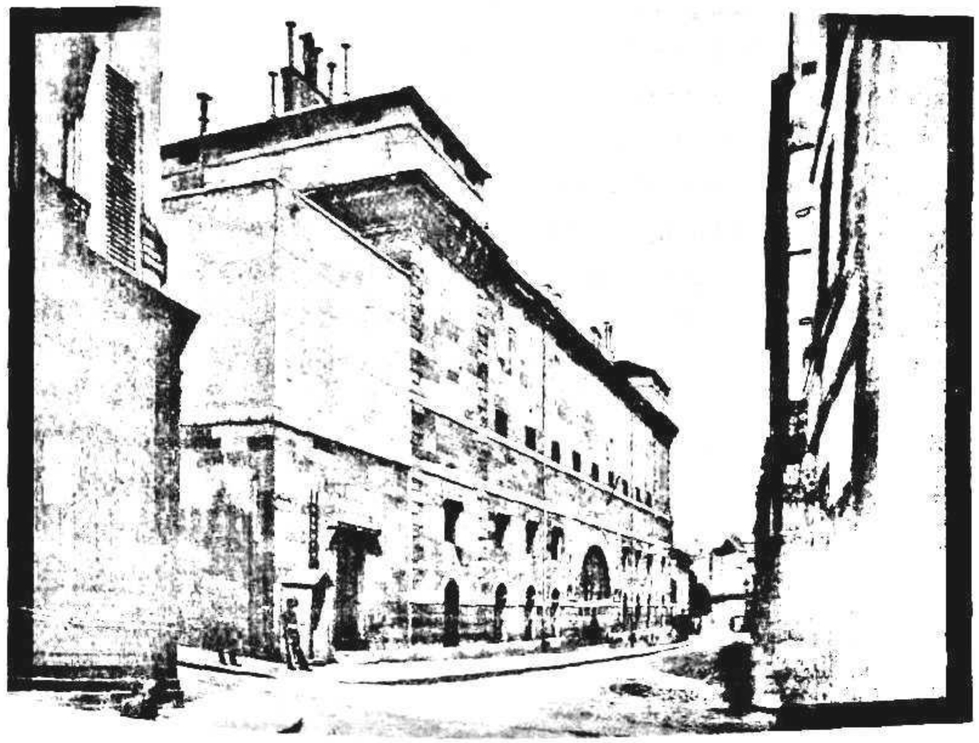


FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
Retrato de Évariste Galois realizado en 1848 por su hermano Alfred.

FOTO SUPERIOR DERECHA:
Tumba de Galois en el cementerio parisino de Montparnasse.

FOTO INFERIOR:
Imagen de finales del siglo XIX, obra del fotógrafo Eugène Atget, en la que puede verse el aspecto de la cárcel donde fue encarcelado Évariste Galois, la prisión Sainte-Pélagie.

Y Dumas, en cambio, en sus memorias, dice «Évariste Galois [...] fue [...] muerto en duelo por Pescheux d'Herbinville». Este era uno de los diecinueve oficiales de la Guardia Nacional absueltos en el juicio de la primavera de 1831 y, por tanto, correligionario de Galois. No era un policía político infiltrado, porque después de la revolución de 1848 que acabó con Luis Felipe se hizo pública la lista de agentes secretos y él no estaba en ella.

En cuanto a las causas del duelo, existen tres hipótesis; la primera y más sencilla —porque es la que Galois escribe— y la que parece más lógica es que fuera una disputa amorosa, consecuencia de su ruptura sentimental con Stéphanie. En una de sus últimas cartas, sin embargo, habla de «una infame coqueta», calificativo que no parece apropiado a la hora de referirse a la persona amada. Si no es Stéphanie, sino otra infame coqueta, ¿quién es ella, si no hay otra noticia de ninguna mujer en su entorno? ¿Cuáles fueron sus relaciones y los graves motivos que le llevaron al duelo sin posible marcha atrás? ¿Y cómo es que no tuvo otra forma de limar las asperezas con el correligionario rival? Y a pesar de su experiencia con las armas, ¿por qué no tenía dudas de que saldría derrotado en el duelo?

Una segunda hipótesis afirma que la policía política le condujo a una encerrona con forma de duelo amoroso. A favor está la confesión a su hermano antes de morir y el hecho de que fuera un molesto opositor al régimen. Pero no parece una versión muy verosímil: Galois acudió al duelo de forma voluntaria.

Hay una tercera hipótesis: el suicidio disfrazado de duelo con un policía con la esperanza de provocar una insurrección por asesinato político. Un entierro multitudinario de un republicano asesinado por el aparato represivo del régimen podía ser un buen desencadenante revolucionario. Y se podía prever si había alguien dispuesto a morir, al suicidio. Si fue un suicidio se explica la certeza de Galois de que iba a morir en el duelo, y también que no se dijera nombre del contrincante del duelo, porque era un camarada, necesario para la puesta en escena. En apoyo de esta hipótesis estarían la mala situación personal de Galois y su depresión. La nota de *Le Précurseur* se refiere a la forma en que se desarrolló el duelo narrando que «a bocajarro cada uno de ellos estaba armado con una pistola y ha hecho fuego. Solo una de estas armas estaba cargada». Puede pensarse que era un duelo ficticio orquestado por dos correligionarios para hacer pasar a uno por víctima de la represión. También se puede elucubrar que Galois pretendiera solo ser herido, lo que provocaría los mismos efectos, y que la mala suerte diera lugar a una herida que resultó fatal.

Como puede verse, incluso después de una investigación —criminal, no matemática— no pueden sacarse conclusiones muy claras sobre las causas del duelo de Galois. En cualquier caso, el matemático murió a una temprana edad y los probables avances científicos que hubiera podido llevar a cabo se desvanecieron: fue una gran pérdida para las matemáticas y para la humanidad.

CAPÍTULO 5

Origen, actualidad y aplicaciones de la teoría de Galois

Las revolucionarias ideas de Évariste Galois no fueron entendidas en su tiempo, ya que, además de tratar temas diferentes de los habituales, eran demasiado avanzadas para su época. Sin embargo, a partir de la segunda mitad del siglo XIX y de las estructuras de grupo y de cuerpo, se desarrolló la que iba a ser conocida como «teoría de Galois», cuyas aplicaciones van mucho más allá de las matemáticas.

Las ideas aportadas por Galois para poder decidir en qué casos una ecuación es resoluble no fueron entendidas en vida del joven matemático. Eran demasiado avanzadas y trataban cuestiones diferentes de las habituales hasta entonces, por lo que tal reacción era esperable. Los académicos se quejaban de que Galois no ofrecía la manera más efectiva para poder decidir si una ecuación era resoluble por radicales, porque, en realidad, lo que resolvía era un problema un poco diferente: afirmaba qué propiedades de las raíces —no de los coeficientes, y, por tanto, no visible directamente en la forma de la ecuación— hacían que una ecuación fuera resoluble.

Con este cambio del punto de vista se inició la llamada «teoría de Galois», desarrollada años después de la muerte del matemático a partir de las estructuras de grupo y de cuerpo. Esta ha tenido un largo recorrido desde la segunda mitad del siglo XIX hasta la actualidad, y ha influido en múltiples ramas de las matemáticas y de la física. Incluso ha llegado a colarse en nuestros bolsillos: hay sistemas de encriptado de teléfonos móviles desarrollados a partir de la teoría de Galois.

Para poder llegar a entender los resultados de Galois es necesario comenzar por algunas ideas de las que siguen siendo llamadas «matemáticas modernas», que tienen su inicio en las ideas de estructura de grupo —en principio asociado a una ecuación, pero después aplicado a muchos otros temas—, la de los sub-

conjuntos de los grupos que también lo son, y que son llamados «subgrupos», y la de cuerpo.

EL CONCEPTO DE GRUPO

Objetos tan distintos como las permutaciones, comentadas anteriormente, los números enteros, los racionales o diferentes transformaciones geométricas tienen en común una misma estructura respecto a una operación en ellos. Esto se evidenció gracias al estudio de la asociación realizada por Galois entre una estructura y la ecuación que determina su resolubilidad.

Una operación, representada con el símbolo •, en un conjunto G es una ley que asocia de forma única a dos elementos cualesquiera a y b de G otro elemento de G, que se representa por $a \bullet b$. Esta definición es equivalente a decir que es una aplicación de $G \times G$ en G, que asocia a cada elemento de $G \times G$ —que es una pareja ordenada de elementos de G (a,b)— otro elemento que se representa por $a \bullet b$.

Diremos que un conjunto G en el que se ha definido una operación • tiene una estructura de grupo —o que (G, •) es una estructura de grupos— cuando se cumplen las siguientes propiedades:

— Asociativa. Dados tres elementos cualesquiera a, b y c de G, podemos operarlos asociándolos como se quiera, porque el resultado es el mismo: $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$.
— Elemento neutro. Existe un elemento en el conjunto G que, operado con todos los de G, no los cambia, sino que se obtiene el elemento de partida. Si ese elemento se representa con e, se cumple que $e \bullet a = a$, para todos los elementos a de G. A ese elemento a veces se le llama «unidad».
— Elemento inverso. Cada uno de los elementos de G tiene asociado de forma única otro elemento, con el que al operar el resultado es la unidad. Cualquier elemento a de G tiene un «inverso» único b tal que $a \bullet b = e$ (a este inverso se le suele representar por a^{-1}, con lo que la expresión anterior sería $a \bullet a^{-1} = e$).

Si además posee una cuarta propiedad, la conmutativa —dados dos elementos cualesquiera a y b, el resultado de operar ambos es el mismo en cualquier orden: $a \bullet b = b \bullet a$—, el grupo se llama «conmutativo» o «abeliano», en honor de Niels Henrik Abel. Este publicó en 1829 en el *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* de August Leopold Crelle un artículo titulado «Memoria sobre una clase particular de ecuaciones algebraicamente solubles». En este el matemático noruego presentaba un resultado en el que se establecía la resolubilidad algebraica de aquellas ecuaciones que —en la terminología acuñada a partir de Galois— tienen un grupo de Galois conmutativo.

Si un grupo tiene un número finito de elementos, a ese número se le llama «orden del grupo». En otro caso, el grupo es infinito.

Ejemplos conocidos de grupos son los números enteros $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ con la operación suma habitual. También lo es el conjunto de los números racionales

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid \forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

excepto el 0, con la multiplicación

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \right),$$

donde el elemento neutro es el 1, y el inverso de un racional a/b es b/a. Ambos son grupos infinitos.

Pueden formarse grupos finitos del orden que se quiera, como se ve a continuación. Para ello se define en $\mathbb{Z}$ la relación de congruencia módulo 6, que es generalizable a cualquier entero positivo n. Diremos que dos enteros a y b son congruentes módulo 6 cuando su diferencia es múltiplo de 6, y los escribiremos:

$$a \equiv b \ (mod\ 6) \leftrightarrow a - b \ es\ múltiplo\ de\ 6.$$

Es fácil ver que esta relación tiene las propiedades de una relación de equivalencia:

— Reflexiva: $a \equiv a \,(mod\ 6)$, para todo entero a.

— Simétrica: Si $a \equiv b \,(mod\ 6)$, también $b \equiv a \,(mod\ 6)$.

— Transitiva: Si $a \equiv b \,(mod\ 6)$ y $b \equiv a \,(mod\ 6)$, entonces $a \equiv c \,(mod\ 6)$.

Esta relación conduce a una partición de $\mathbb{Z}$ en seis clases, según el resto de dividir el número por 6: 0, 1, 2, 3, 4 y 5, que representaremos por 0, 1, 2, 3, 4 y 5. Si se construye la tabla de sumar el resultado será el siguiente:

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Este conjunto resultante de 6 elementos, que representaremos mediante $\mathbb{Z}/\equiv$ o $\mathbb{Z}_6$, tiene una estructura de grupo, con 0 como elemento neutro, con todos los elementos con inverso —aquel que da 0 como suma en su fila o columna, que puede verse que está en todas ellas—. Y además, como la tabla es simétrica, eso indica que es una operación conmutativa. Es, por tanto, un grupo abeliano finito de orden 6. Por el mismo procedimiento podemos construir un grupo finito de orden n, haciendo congruencias módulo n, $\mathbb{Z}_n$, que se llama grupo cíclico de orden n.

LOS SUBGRUPOS

Algunos tipos de subconjuntos de un grupo que conservan la estructura tienen un importante papel en las teorías que desarrolló Galois. Son las diferentes clases de subgrupos, entre las que des-

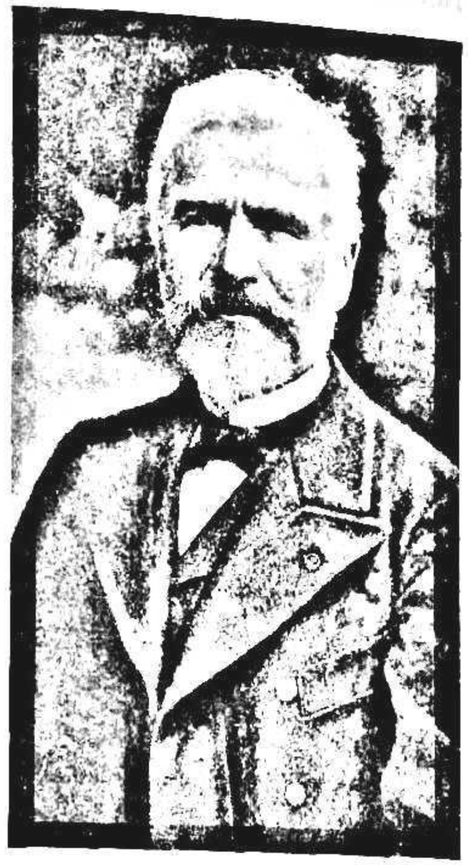


FOTO SUPERIOR IZQUIERDA.
El matemático alemán Felix Klein realizó por medio de grupos y subgrupos una sistematización y jerarquización de todas las geometrías.

FOTO SUPERIOR DERECHA:
Camille Jordan evidenció que la teoría de grupos servía para unificar conceptos y campos matemáticos distintos.

FOTO INFERIOR IZQUIERDA:
Arthur Cayley aplicó la teoría de grupos a los llamados «cuaterniones», extensión de los números reales.

FOTO INFERIOR DERECHA:
La novedosa concepción de Galois del álgebra tuvo un impulso clave con la obra de la matemática alemana Emmy Noether.

tacan los normales. Si (G, •) es un grupo, un subconjunto S de G que con la operación • también sea grupo se llama subgrupo de G. Todos los grupos tienen al menos un subgrupo: el que como único elemento tiene la unidad. Además, en todos los subgrupos está contenida la unidad. Y otro subgrupo que existe en todos los grupos es el propio G. Los subgrupos contenidos estrictamente en G —es decir, que en G hay elementos que no están en el subgrupo— se llaman subgrupos propios.

Si el grupo G es finito, el orden de todos sus subgrupos es divisor del orden del grupo. Y se llama índice de un subgrupo al cociente entre el orden del grupo y el del subgrupo. Se demuestra que para cada divisor del orden de un grupo existe un subgrupo cuyo orden es ese divisor. Como ejemplos, en el caso de los enteros $(\mathbb{Z},+)$ un subgrupo es el conjunto de todos los enteros pares; en $\mathbb{Z}_6$ el subconjunto S = {0, 2, 4} es un subgrupo, puesto que con la suma también es un grupo:

+	0	2	4
0	0	2	4
2	2	4	0
4	4	0	2

Su orden es 3, divisor del orden de $\mathbb{Z}_6$. En cambio, si formamos $\mathbb{Z}_5$, como es de orden 5, que es primo, el único subgrupo puede ser de orden 1: es el formado únicamente por el elemento neutro 0.

Otro ejemplo finito de grupo que tiene relación con las teorías de Galois es el de las permutaciones. En el caso de tener tres elementos, que representamos como 1, 2 y 3, esos tres elementos pueden escribirse de 3! = 6 formas distintas: 123, 132, 213, 231, 312, 321. Si se parte de 123, para pasar a la tercera, 213, se permutan los elementos 1 y 2 —es decir, colocar el 2 en el lugar del 1 y viceversa—. Si se realizan dos permutaciones de forma sucesiva (hacemos su producto •) se pasa a otra permutación: por ejemplo, 213 seguida de 312 nos lleva a 321 —se pone en primer lugar el número que está en el tercer lugar de 213; en segundo lugar, el que está primero en 213, y, en tercer lugar, el que está segundo—. Esto puede escribirse 213 • 312 = 321. Con esta operación el conjunto de las seis permutaciones es un grupo, que se representa S(3), y se llama grupo simétrico. Como tiene 6 elementos, S(3) es de orden 6.

Los posibles subgrupos de S(3) tendrán por órdenes los divisores de 6: 2 o 3. Y, en efecto, existen. El de orden 2 es B = {123, 213}; el de orden 3 es A(3) = {123, 231, 312}. El índice de B es 6/2 = 3 —el cociente entre los órdenes de S(3) y B— y el índice de A(3) es 6/3 = 2. Si en vez de tres elementos partimos de cuatro, el grupo S(4) de las permutaciones tiene 4! = 24 elementos. Y si partimos de n elementos diferentes, el grupo simétrico S(n) tiene $n!$ elementos.

En el grupo simétrico S(n) el subgrupo A(n) formado por todas las permutaciones de orden par —aquellas en que el número de inversiones sobre la permutación inicial 123... $(n-1)n$ es par— recibe el nombre de «grupo alternado». Como hay el mismo número de permutaciones de orden par que impar, el orden de A(n) es la mitad del orden de S(n). En particular, para S(3) el subgrupo A(3) es {123, 231, 312}.

Un subgrupo S de un grupo (G, •) tal que para todo elemento g de G y todo elemento s de S se cumpla que $g \bullet s \bullet g^{-1}$ pertenece a S se llama subgrupo «normal» (o «distinguido» o «invariante»). Un grupo que no tenga subgrupos normales propios se llama «simple».

El concepto de subgrupo distinguido fue introducido por Galois. En este tipo de subgrupos las clases aS por la derecha respecto al subgrupo S (el conjunto de elementos de la forma $a \bullet s$ cuando s recorre S) y las clases por la izquierda Sa (los elementos de la forma $s \bullet a$ cuando s recorre S) coinciden para todo a de G. Si S es normal se puede definir una operación entre las clases aS de la siguiente forma:

$$(a\mathrm{S}) \bullet (b\mathrm{S}) = (a \bullet b)\mathrm{S}$$

respecto a la cual tiene estructura de grupo: se llama grupo cociente y se representa por G/S.

Si S es un subgrupo de G, G/S es un grupo si —y solo si— S es un subgrupo normal de G.

Si un grupo es conmutativo, todos los subgrupos son distinguidos. Por ejemplo, en el grupo $(\mathbb{Z},+)$ que se ha considerado anterior-

mente, si se toma el subgrupo $m\mathbb{Z}$ de los múltiplos de m, el grupo cociente $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ es el grupo de las clases de congruencia módulo m, el que antes hemos llamado $\mathbb{Z}_m$.

En el grupo simétrico $S(n)$ el subgrupo $A(n)$ formado por todas las permutaciones de orden par —aquellas en que el número de inversiones sobre la permutación inicial $123...(n-1)m$ es par—, que se llama «grupo alternado», es un subgrupo normal.

GRUPOS GEOMÉTRICOS

Aunque los grupos empezaron como medida del desconocimiento de las raíces de una ecuación, su estructura también ofrece información sobre la simetría de la misma. Están relacionados, además, con las simetrías geométricas.

Consideremos un triángulo equilátero y busquemos todas sus simetrías: los movimientos de este triángulo dejan al final un triángulo que coincide con el original. Son tres rotaciones de centro en el centro del triángulo (primera línea de triángulos que puede verse en la figura 1) y ángulos 0°, 120° y 240°, y tres reflexiones de ejes las rectas que pasan por un vértice y el punto medio del lado opuesto (segunda línea de triángulos). Cada uno de estos movimientos se puede componer con cualquier otro haciendo primero uno y a continuación el otro. Con esta operación es un grupo de seis elementos, isomorfo al grupo S(3) de las permutaciones de tres elementos.

Si en vez de un triángulo equilátero de lo que se parte es de una «hélice» con ángulos entre las «aspas» de 120° (figura 2), los movimientos que no varían la posición de las mismas son ahora solo los tres giros, porque las reflexiones respecto a los ejes no funcionan. Pero esos tres giros también son un grupo: un grupo cíclico —subgrupo de S(3)—.

Si ahora consideramos un cuerpo más complejo, el cubo, el conjunto de rotaciones respecto a ejes que lo dejan invariante es más extenso, un total de 24, que también forman un grupo. Son las que pueden verse en la figura 3, siendo O el centro del cubo:

FIG. 1

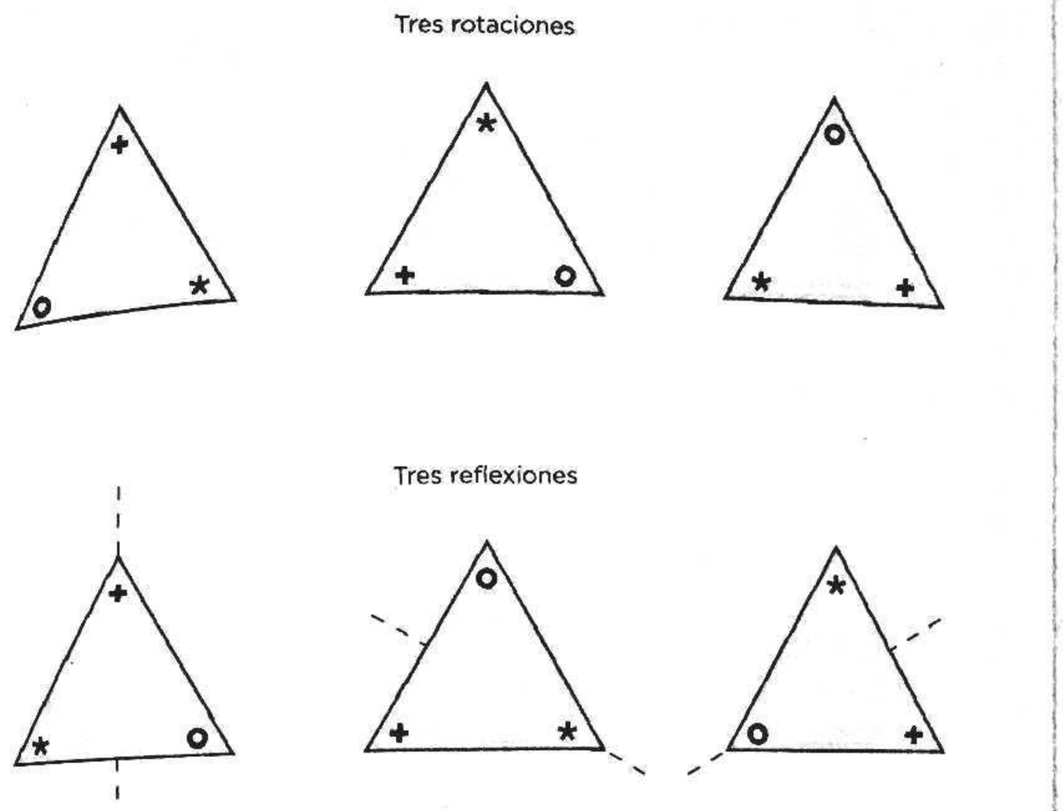


FIG. 2

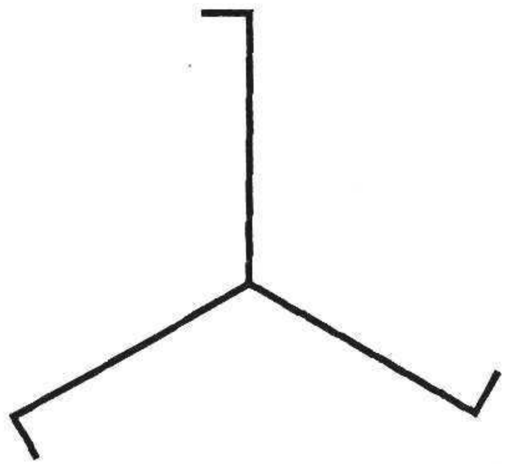
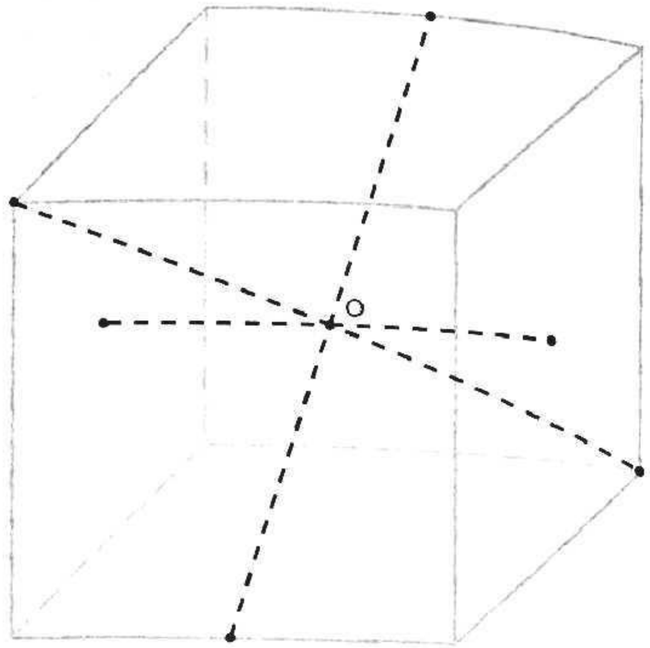


FIG. 3



— Las rotaciones de 180° cuyo eje es la recta que une O con el punto medio de una de las aristas. Como hay doce aristas y cada eje une los puntos medios de dos de ellas, son seis rotaciones.
— Las rotaciones de ángulos 120° y 240° de eje de una diagonal del cubo. Como hay cuatro diagonales, son ocho rotaciones.
— Las rotaciones de ángulos 90°, 180° y 270° de eje de cada una de las rectas perpendiculares a las caras que pasan por O. Como hay tres de estas rectas, serán nueve rotaciones.

En total, si añadimos la rotación idéntica que deja el cubo en la posición inicial, que es el elemento neutro, tenemos un grupo de orden $1+6+8+9=24$. Este tiene varios subgrupos. En el grupo 1 cada una de ellas con la rotación idéntica forma un subgrupo de orden 2. En el grupo 2, para cada diagonal, las dos rotaciones, más la idéntica, forman un subgrupo de orden 3. Y en el grupo 3, para cada recta las tres rotaciones, más la idéntica, forman un subgrupo de orden 4.

GRUPOS RESOLUBLES

Se dice que un grupo G es resoluble cuando se puede formar una cadena finita de subgrupos de G que empieza en el formado por el elemento unidad e y acaba en G,

$$\{e\}=G_1\subset G_2\subset G_3\subset \ldots\subset G_n=G,$$

tal que cada uno de los subgrupos es normal en el siguiente (G_i normal en G_{i+1}) y cuyos grupos cocientes intermedios (G_{i+1}/G_i) son abelianos.

Una definición equivalente es la siguiente: cuando un grupo finito tiene algún subgrupo normal propio, hay alguno H tal que entre H y G no hay otro subgrupo normal de G; se le llama subgrupo normal maximal de G. Lo mismo le pasa a H con respecto a sus subgrupos normales (que pueden no serlo respecto a G pero que sí lo son respecto a H): sea I subgrupo normal maximal. Así se puede continuar la cadena G, H, I, J... hasta llegar al mínimo subgrupo normal posible, y se pueden definir los índices de cada grupo respecto al siguiente: orden(G)/orden(H); orden(H)/orden(I); orden(I)/orden(J)... Entonces, el grupo G es resoluble si cada uno de los cocientes anteriores es primo.

Como ejemplo tenemos S(3). Su subgrupo normal maximal es A(3), de orden 3. En A(3) el subgrupo normal maximal es el formado por la unidad {(123)}, de orden 1. Luego los cocientes de los órdenes respectivos son $6/3=2$ y $3/1=3$, ambos primos, y por tanto S(3) es resoluble.

En el caso de S(5), que tiene $5!=120$ elementos, el subgrupo normal máximal es A(5) con 60 elementos (recordemos que son las permutaciones pares, la mitad del total); el subgrupo normal maximal de A(5) es el formado solo por la unidad {(12345)}, de orden 1. Luego los cocientes de los órdenes son $120/60=2$ (primo);

60/1 = 60 (no primo), y, por tanto, S(5) no es resoluble. Por un razonamiento similar se puede ver que $S(n)$ no es resoluble, para todo n mayor que 5.

ISOMORFISMOS

La posible existencia de estructuras en diferentes conjuntos respecto a sus respectivas operaciones nos lleva a preguntarnos cuáles serán equivalentes, porque si se obtienen, puede asegurarse que determinadas propiedades que se cumplen en una de ellas también se cumplen en la otra. Esto se realiza por medio de aplicaciones entre ellos que conservan la forma: son los isomorfismos.

Sea $\bullet$ una operación en G y $\circ$ una operación en M, se llama «homomorfismo» de $(G, \bullet)$ en $(M, \circ)$ a una aplicación f de G en M tal que para todo par de elementos a y b de G se cumpla que

$$f(a \bullet b) = f(a) \circ f(b).$$

Si además la aplicación f cumple que si $a \neq b$, entonces $f(a) \neq f(b)$ y todos los elementos de M son imagen de alguno de G, entonces el homomorfismo se llama «isomorfismo». La existencia de un isomorfismo entre dos estructuras algebraicas permite asegurar que son estructuras equivalentes, es decir, que tienen las mismas propiedades.

CUERPOS

Sea un conjunto K en el que se han definido dos operaciones, $\bullet$ y $\circ$, que cumplen las siguientes propiedades:

— $(K, \bullet)$ es grupo abeliano, en el que llamamos e al elemento neutro.

— Si representamos por K* a todo el conjunto K salvo e, entonces $(K^*, \circ)$ es también un grupo abeliano (es decir, que todos los elementos de K, salvo el neutro de la operación $\bullet$, tienen elemento inverso).
— Propiedad distributiva de $\circ$ respecto a $\bullet$: cualesquiera que sean a, b, c de K, se cumple que $a \circ (b \bullet c) = (a \circ b) \bullet (a \circ c)$.

El primer ejemplo de cuerpo es el conjunto de los números racionales

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid \forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Se ha visto anteriormente que $\mathbb{Q} - 0$ era un grupo abeliano respecto a la multiplicación

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \right),$$

donde el elemento neutro es el 1, y el inverso de un racional a/b es b/a. Además, $\mathbb{Q}$ con la suma habitual de fracciones

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d} \right)$$

es también un grupo conmutativo, cuyo elemento neutro es el 0. Y se cumple la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma. En él, como en todos los cuerpos, un producto solo es nulo cuando uno de los dos factores lo es. También es un cuerpo $\mathbb{Z}_5$, pero no lo es en cambio $\mathbb{Z}_6$, porque no existen inversos respecto a la multiplicación. En general, $\mathbb{Z}_p$ es un cuerpo siempre que p sea un número primo; y si c es un número compuesto, $\mathbb{Z}_c$ no es nunca un cuerpo.

Si tenemos dos cuerpos K y K' tales que $K \subset K'$ y K es un subcuerpo de K', entonces se dice que K' es una extensión de K.

TEORÍA DE GALOIS

La aportación de Galois a la demostración de la irresolubilidad por radicales de la ecuación general de cualquier grado mayor que cuatro se basa en una serie de ideas interrelacionadas. En primer lugar, el matemático francés se dio cuenta de que a cualquier ecuación se le puede asociar un grupo de permutaciones del que se obtiene una representación de las propiedades de simetría de la misma, que es lo que después se ha llamado el «grupo de Galois» de la ecuación. Imaginemos una ecuación de tercer grado con coeficientes racionales, de la que puede asegurarse —por el teorema de D'Alembert, que afirma que todo polinomio de grado n tiene n raíces— que tiene tres raíces, que llamamos u, v y w, pero no sabemos si serán calculables utilizando radicales. Con las raíces pueden formarse distintas funciones polinómicas, como $v-w$, uw o $u+2$, que podemos transformar en otras semejantes sin más que hacer permutaciones de las raíces. Con alguna de esas permutaciones las funciones no varían, como le sucede a uw al intercambiar u por w, pero otras sí que las cambian, como la que permuta v por w que transforma $v-w$ en $w-v$. E incluso hay algunas de esas funciones, como $u+v+w$ o uvw, que no cambian en ninguna de las permutaciones de S(3): se dice que son invariantes respecto a S(3).

Se demuestra que la función $u+v+w$ —la suma de las tres raíces de la ecuación— es un número racional en toda ecuación de tercer grado con coeficientes racionales como la que se está suponiendo. No sucede, sin embargo, lo mismo con todas las funciones de las raíces, ya que hay otras que, según las ecuaciones, toman valores racionales o irracionales. Pero cuando el valor de la función es racional existe un grupo de las permutaciones de las raíces que deja invariante su valor. El mayor grupo de permutaciones que cumple esta propiedad para todas las funciones racionales de las raíces es el grupo de Galois de la ecuación. Es decir, el grupo de Galois está formado por todas las permutaciones que no varían el valor de todas las funciones racionales de las raíces que tomen un valor racional, lo que quiere decir que esas permutaciones son incapaces de diferenciar las raíces entre sí. Esto indica que es un grupo que proporciona valiosa información sobre la simetría de la ecuación a la que va asociada.

A continuación se verá en el caso de las ecuaciones de cuarto grado. Sean una ecuación con coeficientes racionales, por ejemplo $x^4+px^2+q=0$, y R el cuerpo formado por todas las expresiones racionales de p y q (coeficientes de la ecuación pero considerados como variables) con coeficientes en el cuerpo de los números racionales. Si se hallan las cuatro raíces de esa ecuación, x_1, x_2, x_3 y x_4 —cuya existencia asegura el teorema de D'Alembert— hay algunas relaciones entre ellas, como $x_1+x_2=0$ o $x_3+x_4=0$, que siguen siendo verdaderas aunque se realicen algunas permutaciones entre las raíces —en concreto para 8 de las 24 permutaciones de S(4)—. Estas 8 permutaciones dejan invariantes todas las relaciones de las soluciones de la ecuación anterior y es por tanto el «grupo de la ecuación» o el «grupo de Galois», y que es una medida de la ignorancia que tenemos respecto a esas raíces, puesto que son indistinguibles por esas 8 permutaciones. El índice de este grupo en S(4) es 3 (24, orden de S(4), dividido por 8).

Ahora puede ampliarse el cuerpo R con otras relaciones entre los coeficientes para obtener otro cuerpo R', con lo que se tendrá una parte de las anteriores permutaciones que dejan invariantes todas las relaciones de las raíces en R', que serán también un grupo, subgrupo del anterior. Se continúa con estas ampliaciones hasta llegar a un cuerpo en el que la única permutación que deja invariantes todas las relaciones entre las raíces es la unidad. En el caso de la ecuación bicuadrada de la que se ha partido se van encontrando subgrupos de órdenes 8, 4, 2 y 1, por lo que los índices de cada uno respecto al anterior son 3 (24/8), 2 (8/4), 2(4/2) y 2(2/1).

Se ha esbozado la forma del grupo de Galois y la estructura de sus subgrupos normales en dos casos sencillos, pero hallarlo para una ecuación concreta puede llegar a ser muy complicado: a Galois le bastaba con poder asegurar que para grados n mayores que 4 había siempre ecuaciones cuyo grupo era el grupo de permutaciones de n elementos, S(n). La razón es que las otras dos ideas fundamentales que introdujo Galois —subgrupo normal y grupo resoluble, que necesita la definición de subgrupo normal— le llevaron a poder demostrar su resultado cumbre:

«La condición necesaria y suficiente para que una ecuación sea resoluble por radicales es que el grupo de Galois de la misma sea resoluble».

Con esto Galois resolvía de forma negativa, mediante su imposibilidad, el viejo problema de si era posible resolver por radicales las ecuaciones generales de grado mayor que 4, porque tanto S(5) como S(n) para todo n mayor que 4 eran grupos no resolubles, tal y como hemos visto, y por tanto no existía tal posibilidad. La conclusión a la que llegó Abel de la imposibilidad de la resolución de la ecuación de grado 5 se deducía como un caso particular de su resultado.

En efecto, lo que pasaba en la ecuación que se ha citado antes ($x^4+px^2+q=0$) pasará en todas las ecuaciones de grado 4. En efecto, el orden de S(4) es 24, y nos lleva a una serie de subgrupos de índices 3, 2, 2 y 2, como se ha mostrado anteriormente. En el caso de la ecuación general de grado $n>4$, como S(n) tiene $n!$ elementos, conduce a una serie de dos subgrupos de índices 2 y $n!/2$, y este último número nunca es primo —porque es el producto $3\cdot4\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$—, luego la ecuación general de grado n no es resoluble por radicales, ya que el grupo S(n) asociado a la misma no es resoluble.

La demostración rigurosa del teorema cumbre de Galois, que tiene un enunciado tan sencillo, no es sencilla ni corta. En los múltiples manuales existentes sobre la teoría de Galois, empezando por el clásico de Emil Artin de 1942, o en el de Ian Stewart de 1972, se requieren decenas de páginas y muchos resultados previos para poder llegar a esa demostración. Todo el discurso se realiza hoy en un plano mucho más abstracto, pero más corto y fácil de entender. Actualmente, se explica en las facultades de matemáticas, lo cual no deja de ser irónico, ya que en su época Galois no fue entendido por sus eminentes colegas. Además, se otorga el nombre de teoría de Galois a generalizaciones para el caso de cuerpos que no son extensiones de los racionales, especialmente cuerpos finitos, tan importantes hoy en día en criptografía y en la teoría de códigos correctores de errores. Incluso a los cuerpos finitos se les denomina «cuerpos de Galois» —*Galois Field* o, en forma abreviada, GF—. Puesto que la teoría de Galois relaciona dos estructuras

algebraicas, como son los grupos y los cuerpos, ello ha dado pie a llamar también por el nombre de teoría de Galois a resultados que relacionan situaciones similares en otras estructuras algebraicas.

RECONOCIMIENTO DE LA OBRA DE GALOIS

El conjunto de las obras matemáticas de Évariste Galois recopiladas y publicadas por Émile Picard en 1897 son un total de 60 páginas, de las que 23 son los artículos publicados en vida; 8 páginas, la carta escrita la noche anterior a su duelo y dirigida a su amigo Auguste Chevalier; la versión de la memoria que dirigió a la Academia y que tan mal entendieron los académicos ocupa 18 páginas y, por último, 11 páginas están dedicadas a los fragmentos de la memoria *Des équations primitives qui sont solubles par radicaux* (*Las ecuaciones primitivas que son resolubles por radicales*). Esa pequeña producción ha dado lugar a que en todas las facultades de matemáticas se imparta la teoría de Galois. No cabe duda, por tanto, de la importancia de la contribución del malogrado Évariste Galois a las matemáticas, algo que no consiguió en absoluto en vida.

La incomprensión de los matemáticos de su época estaba, de alguna forma, justificada. Cuando Poisson rechazó su memoria, lo hizo porque el criterio para la solubilidad de ecuaciones por radicales que anuncia Galois no deja nada claro el procedimiento para aplicarlo a una ecuación concreta dada, porque para ello es necesario conocer previamente las raíces, y, en realidad, no hay ninguna fórmula para encontrarlas. Lo que se esperaba y se buscaba desde hacía siglos era una fórmula que relacionara las raíces con los coeficientes de la ecuación, y, en cambio, lo que Galois ofrecía era una condición sobre las raíces. Era, por tanto, una aportación demasiado nueva, ya que se trataba de otro punto de vista, algo que para los matemáticos coetáneos del joven francés era difícilmente aceptable. Nunca ha habido ni se ha encontrado una relación sencilla entre los coeficientes y las raíces. Galois hacía lo más difícil: estaba construyendo nuevos edificios matemáticos y

solo se esperaba de él que rematara su labor utilizando los materiales conocidos de forma ligeramente diferente.

El reconocimiento posterior a la obra de Galois no se produjo rápida ni fácilmente. En septiembre de 1832, poco más de un año después de su muerte, su amigo Chevalier cumplió el deseo de Évariste expresado en su testamento y publicó su trabajo en la *Revue Encyclopédique*, acompañado de una nota necrológica, pero nadie en el mundillo matemático se dio por enterado.

En 1835 Sylvestre-François Lacroix, que junto con Siméon Poisson había rechazado el trabajo de Galois, se refirió a él en una nota final en uno de sus libros:

> En 1831 [...] Galois [...] anunció, en una memoria presentada a la Academia de Ciencias, que «para que una ecuación irreducible de grado primo sea resoluble por radicales es condición necesaria y suficiente que, conocidas dos raíces cualesquiera, las otras se deduzcan de ellas racionalmente»; pero esta memoria pareció casi ininteligible a los comisarios encargados de examinarla.

El empeño y la dedicación tanto de Chevalier como de Alfred Galois, el hermano de Évariste, consiguieron que su obra no cayera en el olvido. Ambos enviaron toda su producción al matemático Joseph Liouville (1809-1882), quien confesó en 1846:

> Cuando, cediendo al deseo de los amigos de Évariste, me dediqué, por así decir, bajo la mirada de su hermano, al estudio detenido de los artículos impresos o los manuscritos que dejó, he creído deber proponerme como objetivo único investigar, desenmarañar, para sacarlo lo mejor posible, qué hay de nuevo en su producción. Mi celo ha sido pronto recompensado, y he disfrutado de un gran placer en el momento en que, después de haber llenado pequeñas lagunas, he reconocido la completa exactitud del método por el cual Galois demuestra, en particular, este bello teorema.

Esta constatación llevó a Liouville, el 4 de septiembre de 1843, a comunicar a la Academia —esperando que esta se interesara— que había encontrado entre los papeles de Galois

> una solución tan exacta como profunda de este bello teorema: «Dada una ecuación irreducible de grado primo, decidir si es o no resoluble con ayuda de radicales». La memoria de Galois está redactada de una forma un poco demasiado concisa. Me propongo completarla con un comentario que no dejará, espero, ninguna duda sobre la realidad del bello descubrimiento de nuestro ingenioso e infortunado compatriota.

La obra de Galois comenzó a ver la luz y, paralelamente, su valía empezó a ser reconocida. Tres años más tarde, en octubre y noviembre de 1846, Liouville publicó los textos de Galois en su revista *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. Chevalier también hizo llegar el trabajo de Galois a Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851), quien se puso en contacto con la familia del malogrado matemático para ver si entre sus papeles había algo sobre la

JOSEPH LIOUVILLE

Casi contemporáneo a Galois, y al contrario que este, Joseph Liouville (1809-1882) estudió en la Escuela Politécnica, donde se graduó en 1827. En 1838 se convirtió en profesor de esta institución y más tarde del Collège de France y de la Facultad de Ciencias de París. En 1836 fundó la revista *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, conocida también como *Journal de Liouville*. Fue un matemático notable e incluso su nombre es recordado en lo que hoy se llama «teoría de Sturm-Liouville», usada en la resolución de las ecuaciones diferenciales, con grandes aplicaciones en la física matemática. También construyó el primer número trascendente —que no es solución de ninguna ecuación con coeficientes racionales—, que forma parte de una familia conocida como «números de Liouville». Es el siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0{,}110001000000000000000001\ldots$$

A pesar de sus investigaciones, Liouville es más conocido por haber sido el responsable de publicar en su revista los trabajos de Galois. Si Liouville no hubiera dedicado tiempo y esfuerzos a desentrañarlos es posible que se hubieran perdido y que nadie más los hubiese conocido, y la fecunda teoría de grupos habría tenido que esperar para ser descubierta tiempo más tarde.

teoría de funciones trascendentes —aquellas que no se pueden expresar con polinomios, es decir, no algebraicas—, de moda en la época. Resultó que no, excepto algunos fragmentos aislados en sus desordenados papeles, y desde luego nada referente a la teoría de las funciones elípticas y abelianas. Alfred Galois sí que comunicó a Jacobi que su hermano «se había dedicado, pluma en mano, a un profundo estudio de sus obras [las de Jacobi]».

La demostración rigurosa de los resultados de Galois la llevó a cabo el italiano Enrico Betti (1823-1892) mediante dos memorias publicadas en 1852. Y todos los resultados de Galois los explicó por primera vez en Alemania Richard Dedekind (1831-1916) en los cursos 1856-1857 y 1857-1858. Incluso llegaron a España, país que no estaba en la vanguardia de las matemáticas, donde José Echegaray (1832-1914), matemático, profesor en la Universidad de Madrid, político y premio Nobel de Literatura en 1904, impartió un curso sobre la teoría de Galois en el curso 1896-1897 y lo publicó al año siguiente con el título *Resolución de ecuaciones y teoría de Galois*.

En la segunda mitad del siglo XIX la teoría de grupos fue ampliando su ámbito de acción y aplicándose a nuevas disciplinas. Galois había sido el primero en desarrollar esta teoría de forma general —aunque estaba de alguna manera implícita, sobre todo en lo referente al grupo de sustituciones, en algunos trabajos de Gauss, Ruffini, Abel y Cauchy—, e introdujo, además, los conceptos de subgrupo y de isomorfismo. Hacia 1854, Arthur Cayley (1821-1895) la aplicó a los cuaterniones —extensión de los números reales, similar a la de los números complejos— y, dos años más tarde, William Hamilton (1805-1865) lo hizo a los poliedros regulares. Fue sobre todo Camille Jordan (1838-1922) quien, en su clásico de 1870, *Traité des substitutions et des équations algébriques* (*Tratado de las sustituciones y de las ecuaciones algebraicas*) puso de manifiesto que la teoría de grupos servía para unificar conceptos y campos matemáticos distintos. Dos de los discípulos de Jordan, el alemán Felix Klein (1849-1925) y el noruego Marius Sophus Lie (1842-1899), se encargaron de utilizar esas características.

En su famoso *Programa de Erlangen* (1872), Klein realizó por medio de grupos y subgrupos una sistematización y jerarquización de todas las geometrías: el objeto de cada geometría era descubrir

las propiedades invariantes respecto a un grupo de transformaciones, explicando así que las diversas geometrías que se pueden encontrar corresponden a considerar diferentes grupos. Y fue también Klein quien en 1884 presentó un ejemplo de dos grupos isomorfos de campos matemáticos muy alejados: el de las rotaciones del icosaedro regular y el de la ecuación de quinto grado. A la vez que Klein trataba con grupos discontinuos, Lie extendió la teoría de Galois de las ecuaciones algebraicas al caso continuo de las ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales, de forma que los grupos de Lie desempeñan un papel esencial para el estudio de la geometría de las ecuaciones diferenciales.

Fue también Lie el encargado por la Escuela Normal —que en 1895 conmemoraba su centenario— de redactar una nota sobre la importancia y la influencia de Galois en el desarrollo de las matemáticas. En ella se lee:

> A los dos [Abel y Galois] se los llevó la muerte sin haber tenido tiempo de poner a plena luz la extensión de sus descubrimientos; los dos debieron dejar a sus sucesores el cuidado de profundizar sus teorías y desarrollar sus consecuencias. Y sin embargo, tan grande es en matemáticas la potencia de las ideas, que se juntará eternamente los nombres de Abel y Galois a los de los principales matemáticos de todos los tiempos.

Resulta chocante este reconocimiento a pesar del poco tacto con que la Escuela Normal trató a Évariste Galois en vida.

Otra muestra de la importancia que ya hacia finales del siglo XIX se reconocía al enfoque y los conceptos introducidos por Galois en todas las ramas de las matemáticas la atestigua la siguiente anécdota. El científico y matemático francés Henri Poincaré, en una conversación con Sophus Lie, afirmó categóricamente que «todas las matemáticas son una historia de grupos». No se trataba tan solo de buenas palabras: el propio Poincaré dio ejemplo utilizando estas estructuras en sus trabajos sobre topología algebraica.

La nueva concepción de Galois de las matemáticas se fue imponiendo y generalizando. Se puede decir, en cierto modo, que consistió en reemplazar los cálculos por las ideas. Esa concepción

contribuyó a la creación del álgebra moderna con el impulso de la matemática alemana Emmy Noether (1882-1935) y las obras del neerlandés Bartel Leendert van der Waerden (1903-1996). Uno de los padres del colectivo de matemáticos franceses Bourbaki, Jean Dieudonne (1906-1992), ya a finales del siglo XX afirmó que, frecuentemente, cuando no se entiende bien alguna cosa en matemáticas, es útil y fecundo hacer intervenir la teoría de grupos.

«Los matemáticos no estudian objetos, sino las relaciones entre objetos.»

— Henri Poincaré.

Pero no hay que pensar que la teoría de grupos se limita a las matemáticas puras. Los grupos de Lie tienen una importancia fundamental también en la física de las partículas elementales, en la que permiten construir, por ejemplo, las ecuaciones del modelo estándar. La teoría de la relatividad restringida descansa fundamentalmente sobre dos grupos: el de Lorentz —por el físico neerlandés Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928)— y el de Poincaré. También Hermann Weyl (1885-1955) fue importante para mostrar la importancia de la teoría de grupos en la mecánica cuántica.

En cuanto al conocimiento de la corta vida de Galois, en julio de 1848 apareció en la revista francesa *Magasin Pittoresque* una biografía suya. En 1896 el entonces supervisor general de la Escuela Normal, Paul Dupuy, publicó el libro *La vie d'Évariste Galois* (*La vida de Évariste Galois*). Su pueblo natal, Bourg-la-Reine, le homenajeó unos años después al colocar en 1909 una placa conmemorativa en el lugar de su casa natal. El entonces director de la Escuela Normal, Jules Tannery, fue el encargado de hacer un discurso en el que pronunció lo siguiente:

> Desde la publicación de Liouville, de año en año, la importancia de la obra de Galois se ve cada vez más claramente; los matemáticos más importantes han reconocido la considerable influencia que ha tenido en el progreso de las matemáticas. [...] Os agradezco, señor alcalde, permitirme hacer las paces con el genio de Galois en nombre de esta Escuela Normal en la que entró con pesar y donde no fue comprendido; fue expulsado de la misma y ha sido, a pesar de todo, una de sus más brillantes glorias.

GALOIS EN LA ACTUALIDAD

En el fecundo campo de la teoría de grupos, el resultado más importante de las últimas décadas ha sido completar la clasificación de los grupos finitos simples —aquellos que no tienen subgrupos normales propios—, que constituyen los bloques fundamentales a partir de los cuales se puede construir cualquier grupo.

Otra contribución de Galois que resulta imprescindible para entender las matemáticas actuales, y en particular su aplicación a un campo tan importante hoy y con tantas perspectivas de futuro como es el tratamiento y la transmisión de la información, son los cuerpos finitos. De hecho, en informática y en los campos de las matemáticas más cercanos a la misma, es habitual llamar «cuerpos de Galois» a los cuerpos finitos. Galois introdujo dichos cuerpos como una aplicación de su idea principal de extender un cuerpo —como es $\mathbb{Z}_p$ cuando p es un número primo— con raíces «imaginarias» de polinomios irreductibles. Hoy en día, los cuerpos finitos se utilizan para diseñar sistemas de codificación y encriptado de señales digitales, de tal forma que el sistema operativo de cualquier teléfono móvil trabaja con cuerpos finitos para proteger la comunicación tanto de interferencias como de potenciales intrusos.

La teoría de números es el campo principal de aplicación de la teoría de Galois. Una filosofía general para tratar problemas aritméticos —ecuaciones en números enteros, o de forma más general, racionales— es considerar las soluciones en una clausura algebraica fijada de $\mathbb{Q}$, y sobre este conjunto de soluciones hacer actuar el grupo de Galois absoluto $G_{\mathbb{Q}}$. Un conocimiento suficientemente bueno de $G_{\mathbb{Q}}$ llevaría a poder estudiar las soluciones del problema original. Pero, a pesar de constituir una de las áreas de investigación más activas, el conocimiento de este grupo es muy limitado.

CLASIFICACIÓN DE LOS GRUPOS FINITOS SIMPLES

Se ha visto que hay grupos infinitos, como $\mathbb{Z}$, y grupos finitos, como $\mathbb{Z}_n$ para cualquier entero positivo n, que tiene justamente n elementos. También se ha comentado que hay grupos finitos que tienen subgrupos diferentes de ellos mismos y del formado por el elemento neutro (por ejemplo, $\mathbb{Z}_6$) y otros que no los tienen (como $\mathbb{Z}_5$). Estos últimos son los llamados «grupos finitos simples»: son los bloques o ladrillos básicos a partir de los cuales se puede construir cualquier otro grupo, por lo que es de capital importancia tener una clasificación de todos ellos. Esa es una tarea a la que se han dedicado múltiples esfuerzos y ha habido que esperar a los inicios del siglo XXI para tenerla completada, con el teorema de clasificación de grupos finitos simples. Todo grupo finito simple es isomorfo, es decir, tiene la misma estructura algebraica, a uno de los siguientes grupos:

— Un grupo cíclico cuyo orden es un número primo.
— Un grupo alternado de grado mayor o igual que 5.
— Un grupo de Lie simple, que puede ser:
  · Los grupos de Lie clásicos
  · Los grupos de Chevalley y los grupos de Steinber.
— Uno de los 26 grupos esporádicos.

Los dos primeros grupos ya han sido comentados, así como los grupos de Lie. La caracterización del resto ha supuesto un esfuerzo coordinado que ha dado lugar a una demostración de miles de páginas. Para hacerse una idea de la dificultad, uno de los 26 grupos esporádicos, apodado «el Monstruo», tiene por orden (número de elementos) nada menos que:

808,017,424,794,512,875,886,459,904,961,710,757,005,754,368,000,000,000.

Uno de los resultados en teoría de números de la teoría de Galois, conocido como la conjetura de la modularidad, o conjetura de Shimura-Taniyama-Weil, fue demostrado a finales del siglo XX por los británicos Andrew Wiles y Richard Taylor, culminando el trabajo de una ingente cantidad de matemáticos. Como consecuencia, obtuvieron una demostración afirmativa de una de las más famosas conjeturas, formulada en 1637 por Pierre de Fermat, el llamado «último teorema de Fermat»: «Para $n > 2$ no hay ninguna terna de números enteros positivos x, y, z que cumplan la ecuación $x^n + y^n = z^n$».

En geometría algebraica aparecen ideas heredadas de las de Galois en diferentes ámbitos, como las superficies de Riemann —curvas algebraicas definidas sobre los números complejos, cuyo nombre proviene del alemán Bernhard Riemann (1826-1866)—, que pueden estudiarse como recubrimientos de la esfera. A su vez, estos recubrimientos permiten trasladar el estudio geométrico al de extensiones de cuerpos de funciones. También la teoría de espacios recubridores en topología puede verse como una versión topológica de la teoría de Galois, donde se sustituyen extensiones algebraicas por recubrimientos y el grupo de Galois absoluto por el grupo fundamental del espacio topológico.

CONCLUSIONES DE UNA VIDA BREVE

Parece que la resolución de problemas matemáticos importantes es cosa de jóvenes. No solo Galois logró desentrañar problemas complejos en su juventud, sino que hay otros muchos ejemplos en la historia no solo de matemáticos que murieron jóvenes —como también le sucedió a Abel—, sino de otros muchos que, aunque su carrera siguió, obtuvieron resultados apreciables de forma precoz: son los casos de Gauss, Kurt Gödel o John Forbes Nash (1928-2015). Tanto es así que el máximo reconocimiento matemático, la Medalla Fields —el equivalente al Nobel de las matemáticas—, tiene como únicos candidatos a investigadores menores de cuarenta años.

Galois rechazó el método habitual de aprendizaje de las matemáticas, ya que lo consideraba cerrado, repetitivo y con poca libertad para la imaginación. Es probable que haber llegado a un conocimiento tan profundo de las matemáticas sin asumir plenamente la ortodoxia metodológica le permitiera poder experimentar con otras formas de hacer que resultaron ser más potentes que las ya conocidas.

Dedicarse de forma concienzuda al dominio de las técnicas al uso en cualquier ámbito puede impedir pensar en abrir nuevos caminos. Por el contrario, alejarse de los caminos trillados —y ha-

cerlo incluso con desprecio, como en el caso de Galois— conlleva la utilización de nuevos mecanismos para resolverlos, así como abrir nuevas perspectivas que servirán para resolver otros en el futuro, especialmente cuando estas técnicas antes novedosas dejen de serlo y se hayan convertido en tradicionales. Pueden seguir obteniéndose nuevos resultados utilizando métodos clásicos, pero no hay que dar por sentado que son el único camino.

El joven matemático francés pensaba que las verdades de la ciencia no debían presentarse como algo acabado e inmutable, sino más bien como algo inacabado y que está sujeto a rectificación. En el prólogo a su memoria escrito en la cárcel denunció con acritud los artificios retóricos de las obras o manuales didácticos, que muestran una ilusión de algo perfecto y ordenado y disimulan las dificultades, los titubeos, las idas y venidas: «En vano los analistas querrían disimular: no deducen, combinan, componen...».

Galois se enfrentó a los problemas matemáticos que le preocupaban como un francotirador, criticando a los poderes establecidos con malos modos y sin crear a su alrededor un grupo de afines que hicieran la presión suficiente para abrir esas estructuras. Lo cierto es que no consiguió grandes éxitos, aunque tampoco hay que minusvalorar sus logros: publicar en revistas de prestigio y que la Academia se ocupara de sus trabajos, aunque fuera para rechazarlos.

Y todo eso a pesar de su extrema juventud, de su arrogancia y sus métodos no muy ortodoxos —tirar un borrador a un profesor o molestar en las sesiones de la Academia serían ejemplos de ello—. Lo cierto es que la pervivencia y el influjo posterior de sus ideas se deben a la labor ejercida por sus próximos, que consiguieron, años después, una revisión de sus trabajos, cosa que él no había logrado en vida.

Es un lugar común, pero asumido y poco discutido, que todos los grandes avances científicos se gestaron en Europa antes del siglo XX, y que en esta centuria fue cuando se añadió Estados Unidos. Sin embargo, en el caso del álgebra no fue así, ya que su impulso fundacional se dio en el mundo árabe, que a su vez recogía conocimientos anteriores desarrollados en la India y China, y hasta llegar a nuestros días en su evolución han participado personas de

JOHN FORBES NASH

El último ejemplo destacado de precocidad matemática es John Forbes Nash (1928-2015), figura que se hizo muy popular después del estreno de la película *Una mente maravillosa* (2001), un *biopic* dirigido por el estadounidense Ron Howard en el que el actor Russell Crowe era el encargado de interpretar el papel del matemático. Nash, cuando tenía veintiún años, se doctoró en la Universidad de Princeton con una tesis sobre juegos no cooperativos, en la que acuñó lo que luego se ha llamado el «equilibrio de Nash», que ha tenido una influencia permanente en diversos campos científicos, políticos y económicos, por lo que le fue concedido el Premio Nobel de Economía en 1994. Muy joven, antes de los treinta años, enfermó de esquizofrenia paranoide severa, pero muchos años después (en la década de 1990), contra todo pronóstico, consiguió superarla, y aunque diría que «había vuelto a pensar racionalmente como científico», ya su vida personal y académica era una sombra de lo que fue. En el año 2015 le fue concedido el premio Abel (instituido por el gobierno noruego en 2002 en el bicentenario del nacimiento del matemático) y murió poco después, junto a su esposa, en un trágico accidente de tráfico.

las más distintas creencias, profesiones y lugares de nacimiento, unas contribuyendo a su desarrollo y otras haciendo de puente para el paso a las nuevas ideas. El álgebra, por tanto, es un formidable logro obra de toda la humanidad.

Incluso personajes tan poco respetuosos con los poderes establecidos como Évariste Galois desarrollaron su trabajo basándose en los resultados de sus antecesores. Es sumamente raro que alguien elabore una teoría válida aislado del ámbito científico y a partir de la nada. Inclusive el matemático indio Srinivasa Ramanujan (1887-1920), que es la excepción de la que siempre se habla, y que demostraba teoremas en la soledad de su India

natal, lo hizo a partir de un manual —no muy adecuado— que cayó en sus manos.

En el caso de Galois, se presenta a menudo su trabajo sobre la resolubilidad de las ecuaciones como un trabajo muy adelantado para la época, tanto que era difícil de entender para sus contemporáneos.

«Si alguien no cree que las matemáticas son simples, es porque no entiende lo complicada que es la vida.»

— John von Neumann.

Lo cierto es que el trabajo de Galois abría caminos que mucho después se habrían de recorrer, pero no lo hacía alzándose sobre la nada, sino que se apoyaba en saberes ya consolidados, muchos de ellos bien recientes. En los artículos que publicó, Galois cita varias veces a Gauss, a Lagrange, a Legendre y a Guglielmo Libri; y en sus manuscritos, además, a John Landen, Ruffini, Cauchy, Abel y Jacobi. No solo conocía el estado de la cuestión, sino que también estaba familiarizado con los avances recientes.

Incluso a pesar de su juventud, que nunca fue un matemático «profesional» y que no debía de ser una persona con muchas habilidades sociales, tuvo contacto con algunos de los ya reconocidos como grandes matemáticos de su época: con Cauchy, que al parecer le persuadió para que hiciera una nueva versión de su memoria y la presentara al Gran Premio de Matemáticas —que no ganó—, y con Poisson, que, a pesar de formar parte del Consejo Real que le expulsó de la Escuela Normal, le animó a redactar de nuevo sus hallazgos y mandarlos a la Academia, cosa que hizo.

En cuanto matemáticos de edad similar, estableció una relación personal con Jacques Charles François Sturm y Guglielmo Libri, con quien, según Sophie Germain, Galois tuvo un encontronazo.

Su memoria seguía en el desarrollo y el modo de hacer de Lagrange y, como pasó unos años más tarde, en realidad podría haber sido entendida por sus contemporáneos. Sin embargo, esta circunstancia no quita ningún valor a su trabajo, que dio un salto adelante formidable y abrió nuevos caminos que fueron recorridos, completados y ampliados por los matemáticos que utilizaron sus ideas para abrir la puerta a la época de las matemáticas modernas.

Lecturas recomendadas

CORBALÁN, F., *Galois. Revolución y matemáticas*, Madrid, Nivola, 2004.

DIEUDONNE, J., *En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy*, Madrid, Alianza Editorial, 1989.

HORMIGÓN, M., *Las matemáticas en el siglo XIX*, Madrid, Akal, 1991.

MARTIN CASALDERREY, F., *Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el Renacimiento italiano*, Madrid, Nivola, 2000.

NAVARRO, J., *Al otro lado del espejo. La simetría en matemáticas*, Barcelona, RBA, 2010.

REY PASTOR, J., y BABINI, J., *Historia de la matemática. Volumen 2: del Renacimiento a la actualidad*, Barcelona, Gedisa, 1985.

SÁNCHEZ FERNÁNDEZ, C., y NOGUEIRA SÁNCHEZ, T., *Abel. El romántico nórdico*, Madrid, Nivola, 2005.

STEWART, I., *Belleza y verdad*, Barcelona, Crítica, 2008.

WUSSING, H. y ARNOLD, W., *Biografías de grandes matemáticos*, Zaragoza, PUZ, 1989.

XAMBO, S., DELGADO, F., y FUERTES, C., *Introducción al álgebra*, Madrid, Editorial Complutense, 1993.

Índice

Abel, Niels Henrik 11, 13, 15, 16, 39, 90, 91, 96-98, 104, 112, 125, 126, 133-135, 138, 141-143, 147, 150
Abel, Premio 149
Academia de Ciencias 9, 44, 45, 54, 59, 74, 90, 91, 96-98, 104, 105, 109-111, 139, 140, 148, 150
álgebra 8, 10, 13, 16-39, 59, 74, 75, 81, 83, 85, 86, 89-91, 95-98, 108-110, 116, 125, 127, 134, 139, 142-149
algoritmo 16, 18
Al-Juarismi 16-19, 26, 27
Appert, Nicolas 51

Bourg-la-Reine 11, 61, 63, 99, 144
Brahmagupta 25
Bravais, Auguste 99
Briggs, Henry 102
Bulletin de Férussac 11, 104

Cardano, Girolamo 16, 32-35
Cauchy, Augustin-Louis 65, 80, 90, 91, 96-98, 104, 106, 142, 150
Cayley, Arthur 127, 142
Chevalier, Auguste 9, 106, 107, 113-116, 139-141, 145, 147
Condorcet, marqués de 44, 53
congruencia 125, 126, 130
Crelle, August Leopold 98, 125
cuerpo 121, 123, 130, 134, 135, 137-139

D'Alembert, Jean le Rond 16, 21, 39, 86, 136, 137
Delambre, Jean-Baptiste 46-48
Descartes, René 36, 38, 39
Dirichlet, Peter Gustav Lejeune 104
Dumas, Alexandre 110, 111, 118

Echegaray, José 142
ecuación
  ciclotímica 85, 86, 88
  diofántica 23, 24, 26
  general 15, 16, 29, 32-39
  resoluble por radicales 15-17, 38, 39, 80, 81, 88, 91, 96, 98, 109, 123, 136, 138-141
Escuela Normal 9, 11, 50, 83, 103, 106-109, 143-145, 150

Escuela Politécnica 11, 16, 74, 76-78, 83, 90, 96, 99, 101, 103, 106, 107, 141

factorial 84
Fermat, Pierre de 146
Fibonacci, Leonardo, 30
Fields, Medalla 147
Fontana, Niccolò, *Tartaglia* 16, 32-34
Fourier, Jean-Baptiste Joseph 80, 97, 104
funciones polinómicas 136

Galois,
  Alfred 62, 115, 117, 140, 142
  Nathalie-Théodore 62
  Nicolas-Gabriel 9, 11, 61-63, 72, 99
  teoría de 9, 10, 17, 121-151
Gauss, Carl Friedrich 11, 15, 16, 38, 58, 59, 65, 80, 85-88, 90, 115, 142, 147, 150
Germain, Sophie 58, 59, 110, 150
Gödel, Kurt 100, 147
grupo
  abeliano 125, 126, 133-135
  alternado 129, 130, 146
  cíclico 88, 126, 130, 146
  de Galois 125, 136-138, 145, 147
  geométrico 130-133
  de permutaciones 128-130, 133, 136, 137
  finito 125, 126, 128, 133, 145, 146
  simétrico 129, 130
  simple 129, 146
  resoluble 133, 134, 137, 138

Hamilton, William 142
Hermite, Charles 77

isomorfismo 134, 142

Jacobi, Carl Gustav Jakob 104, 115, 141, 142, 150
Jayam, Omar 16, 21, 28
Jordan, Camille 127, 142
Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 141

Klein, Felix 127, 142, 143

Lacroix, Sylvestre-François 78, 109, 111, 140
Lagrange, Joseph-Louis de 39, 44, 48, 56, 59, 65, 75, 78, 80-84, 88, 89, 91, 150
Laplace, Pierre-Simon de 41, 43, 44, 48, 49, 54, 55-57, 78, 83
Legendre, Adrien-Marie 48, 65, 73-75, 78, 79, 97, 150
Lie, Marius Sophus 142-144, 146
Liouville, Joseph 104, 140, 141, 144
logaritmo 101, 102
Louis-le-Grand, liceo 11, 65, 67-73, 76, 77, 99, 106
Lovelace, Ada 59
Luis Felipe de Orleans 11, 15, 106, 108, 110, 111, 113, 118
Luis XVIII 11, 52, 62, 63

Méchain, Pierre 46-48
Monge, Gaspard 44, 50, 54, 56, 78, 90

Napoleón Bonaparte 7, 11, 41, 46, 50-52, 54, 56, 57, 59, 61-63, 68, 69, 89, 90, 99, 115
Nash, John Forbes 147, 149
Newton, Isaac 39, 45, 56, 80, 83
Nobel, Premio 142, 147, 149
Noether, Emmy 59, 127, 144

permutación 81, 82, 84, 85, 89-91, 124, 128-130, 133, 136, 137
Poincaré, Henri 49, 143, 144
Poisson, Siméon 97, 106, 109, 111, 139, 140, 150

Richard, Louis 77-79, 96, 97, 103, 142, 150
Ruffini, Paolo 65, 80, 88-91

Sainte-Pélagie 110-112, 117
sistema métrico decimal 10, 43, 44, 48, 74
Societé des Amis du Peuple 8, 107, 110, 116
subcuerpo 135
subgrupo
  índice de un 128, 129, 137
  normal 129, 130, 133, 137
  propio 128, 133

Taylor, Richard 146
teorema fundamental del álgebra 16, 38, 86

Viète, François 36, 37

Wiles, Andrew 146